

ESTUDO DO MAPA LOGÍSTICO-LIKE: Convergência para o estado estacionário

Flávio H. GRACIANO¹; Joelson D. V. HERMES²; Marcílio S. ANDRADE³; Edson D. LEONEL⁴

RESUMO

O presente estudo discute o decaimento assintótico para o estado estacionário em uma família de mapeamentos logístico-like. Os resultados numéricos foram confirmados utilizando um formalismo de escala e uma abordagem analítica do problema. Tal análise é feita na bifurcação e em sua vizinhança.

INTRODUÇÃO

O mapa logístico é um modelo matemático que foi descrito em 1976 pelo biólogo Robert May, com uma aplicação direta em Biologia (MAY, 1976). Tal mapa é dado pela equação

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n), \quad (1)$$

onde x_n é o número de indivíduos na n -ésima geração, e R é um parâmetro de controle. Além da Biologia, já temos aplicações relacionadas à Física, Química, Engenharia, Matemática e outros (TEIXEIRA et al., 2015).

Neste trabalho estudaremos a dinâmica do mapa logístico-like, dado por

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \text{ com } \gamma \geq 1 \quad (2)$$

onde R é um parâmetro de controle. Com a variação de R , o sistema experimenta bifurcações que conduzem à uma dinâmica para atratores, podendo estes serem caóticos.

MATERIAL E MÉTODOS

No decorrer do trabalho fizemos o uso de computadores para auxiliar nas simulações numéricas, através das quais foi observada a evolução do sistema. Além disso usamos técnicas para resolução de equações diferenciais para o tratamento

¹ Flávio H. Graciano –IFSULDEMINAS–Inconfidentes/MG - E-mail: flavio.graciano@ifsuldeminas.edu.br
² Joelson V. Hermes –IFSULDEMINAS–Inconfidentes/MG - E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br
³ Marcílio S. Andrade – IFSULDEMINAS- Passos/MG - E-mail: marcilo.andrade@ifsuldeminas.edu.br
⁴ Edson D. Leonel – UNESP – Campus Rio Claro – E-mail: edleonel@rc.unesp.br

analítico do problema.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Consideremos o mapeamento

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma) = F(R, x_n), \quad (3)$$

no ponto fixo temos $x_{n+1} = x_n = x$, fazendo isso chegamos a seguinte equação

$$x[1 - Rx(1 - x^\gamma)] = 0,$$

a qual apresenta as seguintes soluções: $x = 0$ e $x^\gamma = 1 - \frac{1}{R}$, que são os pontos fixos para o mapeamento estudado.

Analisando a estabilidade para esses pontos fixos temos:

Ponto Fixo 1: $x = 0$

Uma vez que $F(R, x) = Rx(1 - x^\gamma)$ temos que $\frac{\partial F}{\partial x} = R - R(\gamma + 1)x^\gamma$, então $\frac{\partial F}{\partial x}|_{x=0} = R$,

a estabilidade ocorre quando $\left| \frac{\partial F}{\partial x}|_{x=0} \right| < 1$, logo:

$$|R| < 1 \Rightarrow -1 < R < 1, \text{ como } R \geq 0 \text{ temos que } 0 \leq R < 1$$

ou seja, o ponto fixo $x = 0$ é assintoticamente estável para $R \in [0, 1)$.

Ponto Fixo 2: $x^\gamma = 1 - \frac{1}{R}$

Para esse caso temos duas possibilidades:

i) γ par, sendo assim teremos dois pontos fixos, $x = \pm \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$ analisando a estabilidade desses dois pontos fixos chegamos aos seguintes resultados

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{x=PF} = R - R(\gamma + 1) \left[\pm \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^\gamma, \text{ como } \gamma \text{ é par} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}|_{x=PF} = -R\gamma + \gamma + 1$$

sendo assim a estabilidade acontece quando $-1 < -R\gamma + \gamma + 1 < 1$. Desenvolvendo a desigualdade concluímos que $1 < R < \frac{2+\gamma}{\gamma}$, ou seja, o ponto fixo é estável para $R \in \left(1, \frac{2+\gamma}{\gamma}\right)$. Para $R = 1$ ocorre uma bifurcação chamada de bifurcação de forquilha.

ii) γ não é par, isso faz com que tenhamos apenas um ponto fixo $x = \left[1 - \frac{1}{R}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$ o qual é estável para $R \in \left(1, \frac{2+\gamma}{\gamma}\right)$. Para $R = 1$ a bifurcação é chamada transcítica.

Conhecido os pontos fixos para esse tipo de mapeamento, discutiremos a convergência para o ponto fixo $x = 0$, tanto na bifurcação onde $R = R_c = 1$, quanto nas vizinhanças da bifurcação onde $R < R_c$ de forma que $\mu = R_c - R \cong 0$.

A convergência para o estado estacionário é descrita a partir da distância

para o ponto fixo. Tal convergência é dependente do número de iterações n , da condição inicial x_0 e também do parâmetro γ . A figura 1 mostra a convergência para o ponto fixo $x = 0$, para $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$ e para diferentes valores de x_0 .

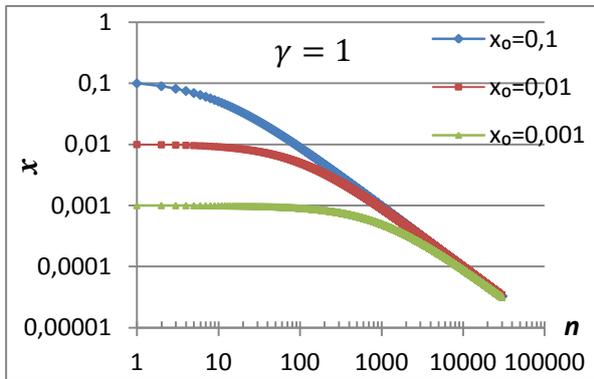


Figura 1. Convergência o ponto fixo $x=0$, com $\mu = 0$ e para $\gamma = 1$.

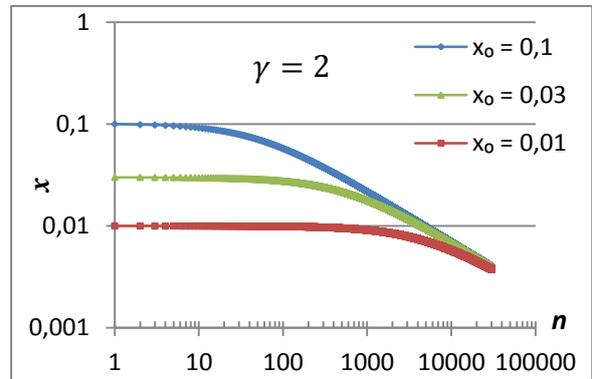


Figura 2. Convergência o ponto fixo $x=0$, com $\mu = 0$ e para $\gamma = 2$.

Ao analisarmos as Figura 1 e 2 percebemos que inicialmente a órbita fica confinada a um platô e o tamanho desse platô depende da condição inicial x_0 . Além disso, é possível notar que após certo número de iterações n_x essa órbita sofre uma transição e sai do regime constante para um decaimento, a qual segue uma lei de potência. Considerando o comportamento observado e considerando o caso em que $\mu = 0$, ou seja, $R = R_c = 1$ é possível supor as seguintes hipóteses:

- 1- Para $n \ll n_x$, ou seja, um número de iterações suficientemente pequeno, assim a relação entre x e n pode ser descrita da seguinte forma:

$$x(n) \propto x_0^\alpha, \text{ onde } \alpha \text{ é um expoente crítico.}$$

Para n suficientemente pequeno, percebemos que a órbita ainda se encontra confinada ao platô, sendo assim concluímos que $x(n) \propto x_0$, logo $\alpha = 1$. É importante notar que o valor encontrado para α independe de γ .

- 2- Para $n \gg n_x$, ou seja, um número de iterações suficientemente grande, a relação entre $x(n)$ e n pode ser descrita como:

$$x(n) \propto n^\beta, \text{ onde } \beta \text{ também é um expoente crítico.}$$

Uma vez que depois de um número de iterações n_x o comportamento x versus n segue uma lei potência. Vale a pena ressaltar que diferentemente do caso anterior, o valor de β depende de γ .

- 3- Já o número de iterações n_x se relaciona com a condição inicial x_0 da seguinte forma:

$$n_x \propto x_0^z, \text{ onde } z \text{ é um expoente crítico.}$$

O tempo que a órbita leva para sofrer a transição depende da condição inicial x_0

e z é um expoente de transição.

Utilizando uma lei de potência apropriada é possível encontrar numericamente o valor de β , uma vez que já conhecemos o comportamento de $x(n)$ versus n , da mesma forma para determinarmos o valor de z é preciso conhecer o comportamento de n_x versus x_0 e assim utilizando uma lei de potência adequada determinamos numericamente o valor de z .

Os resultados encontrados até agora aliados às três hipóteses de escala, nos sugere a utilização de uma função homogênea generalizada para descrever o comportamento de x em função das variáveis n e x_0 (LEONEL, 2015). Tal função pode ser descrita como

$$x(x_0, n) = lx(l^a x_0, l^b n), \quad (4)$$

onde l é um fator de escala, a e b são expoentes característicos. Tal escolha nos remete aos seguintes desdobramentos:

i) Uma vez que l é um fator de escala fazemos $l^a x_0 = 1$, o que nos leva a $l = x_0^{-\frac{1}{a}}$. Substituindo esse resultado na equação (4), temos:

$$x(x_0, n) = x_0^{-\frac{1}{a}} x\left(1, x_0^{-\frac{b}{a}} n\right), \quad (5)$$

comparando esse resultado com a primeira hipótese de escala percebemos que o termo $x\left(1, x_0^{-\frac{b}{a}} n\right)$ é constante para $n \ll n_x$, sendo assim concluímos que $\alpha = -\frac{1}{a}$.

ii) Assumindo $l^b n = 1$, temos que $l = n^{-\frac{1}{b}}$. Substituindo na equação (4) temos:

$$x(x_0, n) = n^{-\frac{1}{b}} x\left(n^{-\frac{a}{b}} x_0, 1\right), \quad (6)$$

comparando com a segunda hipótese de escala é possível notar que o termo $x\left(n^{-\frac{a}{b}} x_0, 1\right)$ deve ser uma constante para $n \gg n_x$, logo concluímos que $\beta = -\frac{1}{b}$.

iii) E finalmente igualando as duas expressões obtidas para l temos que $x_0^{-\frac{1}{a}} = n^{-\frac{1}{b}}$, mas como $\alpha = -\frac{1}{a}$, $\beta = -\frac{1}{b}$ e $n = n_x$ para esse ponto, podemos dizer que $x_0^\alpha = n_x^\beta$, logo $n_x = x_0^{\frac{\alpha}{\beta}}$, agora comparando com a terceira hipótese concluímos que $z = \frac{\alpha}{\beta}$.

Essa relação entre os expoentes críticos define uma lei de escala. Isso implica que conhecendo dois dos expoentes críticos permite determinar o terceiro.

Ainda para o caso onde $R = R_c = 1$ vamos mostrar uma abordagem analítica para o equilíbrio, para tal vamos analisar a equação do mapeamento escrita como

$x_{n+1} = x_n - x_n^{\gamma+1}$, sendo assim essa equação pode ser convenientemente reescrita:

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^{\gamma+1} \text{ daí temos } \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} = -x_n^{\gamma+1}. \quad (7)$$

Observando atentamente o primeiro membro da equação (7) percebemos que esse quociente nos remete a definição de derivada, uma vez que 1 é a menor variação que pode ocorrer já que se trata de um mapa discreto. Sendo assim consideramos agora que a variável dinâmica x , nas proximidades do ponto fixo, possa ser tratada como uma variável contínua, logo a equação (7) que se trata de uma equação de diferenças passa ser representada pela seguinte equação diferencial $\frac{dx}{dn} = -x^{\gamma+1}$, considerando que para $n = 0$ temos $x(0) = x_0$ obtemos então:

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{dx}{x^{\gamma+1}} = - \int_0^n dn. \quad (8)$$

Resolvendo as integrais e organizando os termos de maneira conveniente chegamos a seguinte expressão

$$x(n) = \frac{x_0}{[x_0^\gamma \gamma n + 1]^{\frac{1}{\gamma}}}. \quad (9)$$

De posse desse resultado basta analisarmos o que ocorre com a equação (9) para determinados intervalos de n . Primeiramente vamos analisar a equação para $x_0^\gamma \gamma n \ll 1$, para esse caso é fácil perceber que $x(n) \cong x_0$, mas esse intervalo em questão é equivalente a $n \ll n_x$, sendo assim comparando o resultado encontrado aqui com a primeira hipótese de escala concluímos que $\alpha = 1$. Na sequência consideramos o intervalo $x_0^\gamma \gamma n \gg 1$, que equivale a $n \gg n_x$, observando a equação (9) percebe-se que $x(n) \cong n^{-\frac{1}{\gamma}}$, sendo assim basta comparar tal resultado com a segunda hipótese de escala e obtemos $\beta = -\frac{1}{\gamma}$. E finalmente o caso em que $x_0^\gamma \gamma n = 1$, onde $n = n_x$, e obtemos $n_x \cong x_0^{-\gamma}$ e novamente recorrendo às hipóteses de escala, agora com a terceira, concluímos que $z = -\gamma$. Os resultados numéricos encontrados por meio de simulações confirmam a validade tanto da lei de escala quanto do procedimento analítico utilizado.

Trataremos agora a dinâmica para $\mu \neq 0$, ou seja, nas proximidades da bifurcação. Experimentalmente é observado que a convergência para o estado estacionário ocorre de forma exponencial, do tipo:

$$x(n, \mu) \propto e^{-\frac{n}{\tau}}, \quad (10)$$

onde τ é o tempo de relaxação o qual pode ser descrito como $\tau \propto \mu^\delta$, onde δ é um expoente de relaxação. O valor de δ pode ser encontrado experimentalmente, buscaremos aqui determinar esse mesmo valor através de uma abordagem analítica. Para esse caso estamos na $R < R_c$, isto é, imediatamente antes da bifurcação, sendo assim reescrevemos o mapeamento convenientemente como:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} = x_n(R-1) - Rx_n^{\gamma+1}. \quad (11)$$

Novamente o primeiro membro da equação (11) pode ser interpretado como $\frac{dx}{dn}$, além disso é importante ressaltar que perto do estado estacionário x é muito pequeno, sendo assim $x_n^{\gamma+1}$ é muito menor já que $\gamma > 1$, logo esse termo pode ser desconsiderado. Então chegamos a seguinte equação diferencial $\frac{dx}{dn} = -x\mu$, onde $\mu = 1 - R$. Resolvendo essa equação diferencial que para $n = 0$ tem $x(0) = x_0$ obtemos $x(n) = x_0 e^{-\mu n}$. Agora comparando esse resultado com a equações (10) e a relação $\tau \propto \mu^\delta$, concluímos que $\delta = -1$, o qual é independente do parâmetro γ .

CONCLUSÕES

Analisando a convergência para o estado estacionário numa família de mapeamentos logístico-like, tanto no ponto de bifurcação ($R = R_c$), quanto nas proximidades da bifurcação ($R < R_c$), tal estudo nos permitiu comparar a fenomenologia com a análise analítica aqui abordada. Além disso, usamos um formalismo de escala para explorar a evolução para o estado de equilíbrio. Tal formalismo nos mostrou que, no ponto de bifurcação, os expoentes críticos se relacionam segundo a lei de escala $z = \frac{\alpha}{\beta}$. Notamos ainda que nas proximidades da bifurcação ocorre um decaimento exponencial para o ponto fixo, no qual o tempo de relaxação segue a lei $\tau \propto \mu^\delta$ e mostramos que $\delta = -1$ e independe da não linearidade do mapeamento.

REFERÊNCIAS

- TEIXEIRA R.M., et al. **Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation.** Phys. Lett. A 379 (2015) 1246.
- MAY. R.M. **Simple mathematical models with very complicate dynamics.** Nature, 261 (5560):459.
- LEONEL E.D. **Fundamentos de Física Estatística.** São Paulo: Blucher, 2015.