8ª JORNADA CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DO IFSULDEMINAS
5º Simpósio de Pós-Graduação

ESTUDO DO MAPA LOGÍSTICO

Anderson A. A. da SILVA1; Fábio H. da COSTA2; Joelson D. V. HERMES3; Flávio H. GRACIANO4;

RESUMO

O mapa logístico é uma equação determinística, através da qual é possível fazer uma análise da dinâmica de uma população. O interesse pelo assunto vem aumentando a cada dia, e um dos motivos é o fato de apresentar uma dinâmica não linear com uma matemática cheia de riqueza. O presente estudo busca compreender algumas propriedades dessa equação logística, em primeiro momento utilizando uma abordagem analítica e posteriormente uma análise numérica do problema e por fim mostrar que essas abordagens distintas apontam para os mesmos resultados

Palavras-chave: Equação logística; Dinâmica; Caos.

1. INTRODUÇÃO

O principal foco da pesquisa consiste em compreender e descrever algumas propriedades do mapa logístico, uma vez que essa equação logística possui muitas virtudes, como o fato de ser acessível e mesmo assim ilustrar muitas noções de dinâmica não linear (FEIGENBAUM,1979), ela ainda apresenta uma matemática cheia de vida e riqueza onde muitos aspectos ainda não rigorosamente entendidos e são estudados por alguns dos melhores matemáticos da atualidade. Como se não bastasse, o mapa logístico possui aplicações diretas em biologia, química, engenharia, matemática e em muitos outros tópicos (TEIXEIRA, 2015).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Umas das primeiras tentativas de prever a dinâmica de uma população foi o modelo malthusiano, de 1978. Tomas Robert Malthus, elaborou um modelo não linear onde o total da

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes. Inconfidentes/MG - E-mail: andersonantsilva1@gmail.com
[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes. Inconfidentes/MG. E-mail: fhc961@hotmail.com
[3] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes. Inconfidentes/MG. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br
[4] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes. Inconfidentes/MG. E-mail: flavio.gracianos@ifsuldeminas.edu.br

população dependia exclusivamente das taxas de natalidade(A), de mortalidade(B) e do número de indivíduos(C) (FIELDER-FERRARA, 1994). A expressão matemática para este modelo é:

$$\frac{dn}{dt} = (A - B)N$$

que é uma expressão geométrica.

Em 1845 o matemático belga Pierre François Verhulst, propôs um modelo não-linear onde a mortalidade seria proporcional ao quadrado do número de indivíduos (FIELDER-FERRARA, 1994). Este modelo pode ser expresso pela equação diferencial:

$$\frac{dn}{dt} = AN - BN^2$$

onde N é o número de indivíduos, A é a taxa de natalidade e B de mortalidade.

O modelo de Verhuls foi retomado em 1976 por Robert May, porém, não em sua forma diferencial, mas em forma de mapa, onde cada valor é obtido a partir do valor anterior. O mapa logístico é mais interessante e apresenta um comportamento mais rico. Tal mapa é dado pela equação

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n) \qquad (1)$$

onde x_n, é o número de indivíduos na *n*-ésima geração, e R é um parâmetro de controle.

O mapa logístico é uma equação determinística, ou seja, sua situação futura será determinada pelas condições presentes. O que chamou a atenção de May foi o fato de que o comportamento deste mapa varia radicalmente para diferentes valores de R. O comportamento desse sistema passa de periódico a caótico devido a pequenas variações de R.

Enquanto o comportamento do mapa logístico é periódico, é fácil prever as condições futuras, pois obedecem a uma certa regularidade que, a longo prazo, se estabiliza e define um atrator. Mas, quando acontece o regime caótico, quaisquer variações presentes, ou seja, nas condições iniciais, provoca grandes variações nas condições futuras. Como na prática é muito difícil definir com exatidão as condições iniciais, esse comportamento acaba comprometendo a previsibilidade do sistema, que apesar de determinístico torna-se imprevisível, uma vez que o atrator perde qualquer regularidade, quando isso ocorre ela passa a ser denominado atrator estranho.

A melhor maneira de observar a transição para o comportamento caótico é traçando o conjunto de atratores do mapa logístico para diferentes valores de R. Esta transição para o caos é conhecida como rota de duplicação de período. As duplicações ocorrem nos pontos de bifurcação, uma vez que bifurcação é um ponto onde não há perda de estabilidade do atrator.

3. MATERIAL E MÉTODOS

No decorrer do trabalho fizemos simulações numéricas para observar o comportamento do sistema. Além disso, usamos técnicas para resolução de equações diferenciais para o tratamento analítico.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Considerando o mapeamento $x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n) = f(x)$, onde $R[0,4]$, no ponto fixo temos $x_{n+1} = x_n = x$, fazendo isso chegamos a seguinte equação:

$$x = Rx(1 - x) \tag{2}$$

a qual apresenta as seguintes soluções: $x = 0$ e $x = 1 - \frac{1}{R}$, que são os pontos fixos para o mapeamento estudado. Fazendo a análise de estabilidade para esses pontos fixos como proposta por Hermes (2015, p.6) temos:

1° ponto fixo: $x = 0$

Uma vez que temos que $\frac{df}{dx} = R - 2Rx$, então $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} = R$, a estabilidade ocorre quando $\left|\frac{df}{dx}|_{x=0}\right| < 1$, logo:

$$|R| < 1 \Rightarrow \; -1 < R < 1, como\ R \geq 0\ temos\ que\ 0 \leq R < 1$$

ou seja, o ponto fixo $x = 0$ é assintoticamente estável para $R \in [0,1)$.

2°ponto fixo: $x = 1 - \frac{1}{R}$

De forma análoga ao que foi feito para o ponto fixo 1 analisamos a estabilidade para esse ponto fixo chegamos ao seguinte resultado: $1 < R < 3$, ou seja, o ponto segundo ponto fixo é assintoticamente estável para $R \in (1,3)$. Vale a pena ressaltar que para $R = 1$ o mapa apresenta uma bifurcação transcrítica.

Fazendo agora a mesma análise para a segunda iterada do mapa, período 2, temos:

$$x_{n+2} = Rx_{n+1}(1 - x_{n+1})$$

$$x_{n+2} = Rx_n(1 - x_n) - R[Rx_n(1 - x_n)]^2 \tag{3}$$

Aplicando a definição de ponto fixo em (3) temos:

$$x = r^2x - r^2x^2 - r^3x^2 + 2r^3x^3 - r^3x^4 \tag{4}$$

Resolvendo a equação (4) encontramos as seguintes raízes: $x = 0$, $x = 1 - \frac{1}{r}$, já encontradas no estudo do primeiro ponto fixo e duas novas raízes:

$$x = r + 1 \pm \frac{\sqrt{(r+3)(r+1)}}{2r}$$

Teoricamente teríamos que analisar a estabilidade para esses dois novos pontos fixos, da mesma forma como foi feita para o os dois primeiros, porém percebemos que essa análise se torna muito trabalhosa, por isso se torna mais vantajoso um estudo numérico a partir desse ponto, principalmente para as próximas iteradas do mapa.

5. CONCLUSÕES

Estudamos a estabilidade no mapa logístico para alguns pontos fixos e tal estudo nos permitiu comparar os resultados numéricos com a abordagem analítica aqui adotada. Verificamos que o ponto fixo $x = 0$ é estável para $R \in [0,1)$ e o ponto fixo $x = 1 - \frac{1}{R}$ é estável para $R \in (1,3)$, como encontrado na literatura, o que nos permite concluir que os resultados analíticos foram satisfatórios. Percebemos ainda que para $R = 1$ o mapeamento apresenta um bifurcação transcrítica e para $R = 3$ uma bifurcação de duplicação de período.

REFERÊNCIAS

FIELDLER-FERRARA. N., PRADO, C. P.C. **Caos: Uma introdução.** São Paulo: Blücher, 1994.

FEIGENBAUM, M. J. **The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations**. J. Stat. Phys. 21, 669-706, 1979.

HERMES, J. D. V.; et al. In: Simpósio da Pós-Graduação do IFSULDEMINAS, 4, 2015, Poços de Caldas, **ESTUDO DO MAPA LOGÍSTICO-LIKE: Convergência para o estado estacionário.** *Resumos*... Poços de Caldas: IFSULDEMINAS, 2015, p.6.

TEIXEIRA R.M., et al. **Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation**. Phys. Lett. A 379 (2015) 1246.