

TEORIA DA INTERMITÊNCIA: Uma Análise no Mapa Logístico

Joelson D. V. HERMES¹; Flávio H. GRACIANO²; Edson D. LEONEL³

RESUMO

O presente estudo discute o fenômeno de intermitência no mapa logístico. Foi analisada a evolução do sistema e os resultados numéricos observados foram confirmados utilizando uma abordagem analítica do problema.

Palavras-chave: Mapeamentos; Bifurcação; Caos.

1. INTRODUÇÃO

O comportamento característico das intermitências é o de um sinal que é regular – periódico ou quase-periódico – durante um certo intervalo de tempo e que evolui para produzir um “estouro” geralmente caótico durante um breve instante, o sistema retorna depois seu comportamento regular e o processo recomeça com o aparecimento de outros “estouros” de oscilação aperiódica (FIEDLER-FERRARA, 1994). O comportamento caótico global é então dado pelos “estouros”, mas, sobretudo pela distribuição aleatória do comportamento dos períodos regulares.

Pomeau e Monneville descreveram três tipos diferentes de intermitência correspondente às três maneiras pelas quais os autovalores da matriz de Floquet atravessam o círculo unitário no plano complexo: em $+1$ (tipo I); em -1 (tipo III); e através de dois autovalores conjugados (tipo II). Em todos os casos a bifurcação associada é subcrítica (FIEDLER-FERRARA, 1994). Aqui estamos interessados no início do desenvolvimento caótico caracterizado pela ocorrência de fases regulares separadas por “estouros” intermitentes.

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes. Inconfidentes/MG - E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br

² Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes. Inconfidentes/MG. E-mail: flavio.graciano@ifsuldeminas.edu.br

³ Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus de Rio Claro. Rio Claro/SP. E-mail: edleonel@rc.unesp.br

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Pomeau e Manneville apontaram que essa transição intermitente para turbulenta origina-se quando uma bifurcação tangente ocorre, ou seja, quando o cruzamento se dá por $+1$, caracterizando intermitências do tipo I. A intermitência do tipo I está presente em um modelo simples, o bem conhecido mapa logístico:

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n) \quad (1)$$

com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq R \leq 4$. O diagrama de bifurcação para essa mapa é mostrado na Figura 1 (a). Percebe-se que passada a primeira cascata de duplicação de período várias regiões “abertas” com estranhos números de pontos fixos aparecem, os quais vêm de bifurcações tangentes e que ocorrem para um valor crítico de R , aqui denominado por R_c . As três regiões cíclicas aparecem depois de $R_c = 1 + \sqrt{8}$, como afirma Hirsch. Como R aumenta ainda mais se pode ver, Figura 1 (b), que o comportamento desses três ciclos sofre a usual bifurcação de cascata para o caos. Contudo para R abaixo do R_c o sistema também entra no regime caótico.

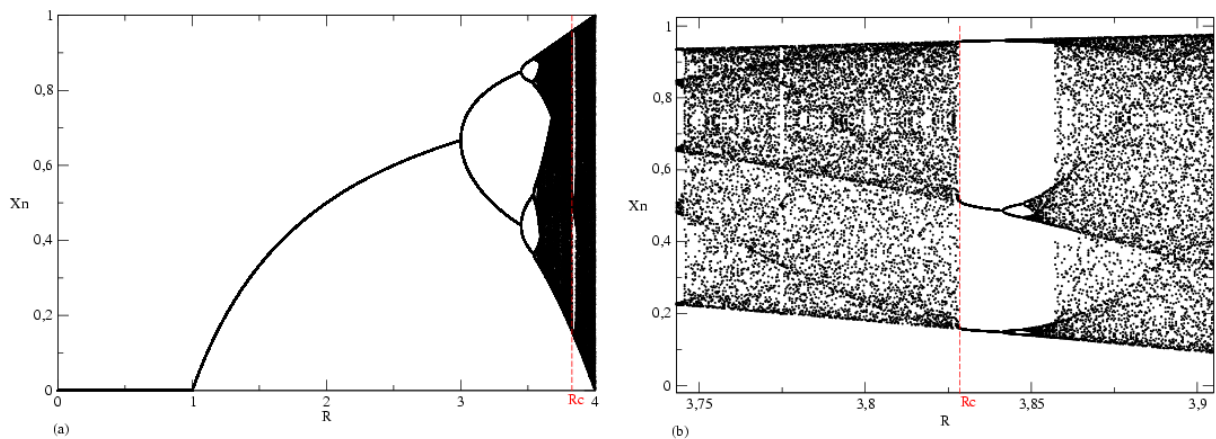


Figura 1: Diagrama de Bifurcação do mapa logístico

Iterando a equação 1, encontramos os resultados mostrados nas Figuras 2(a) e 2(b), para $R < R_c$ intervalos cíclicos são interrompidos por um desenvolvimento irregular, já para o caso de $R > R_c$ o sistema vai para um regime de período três .

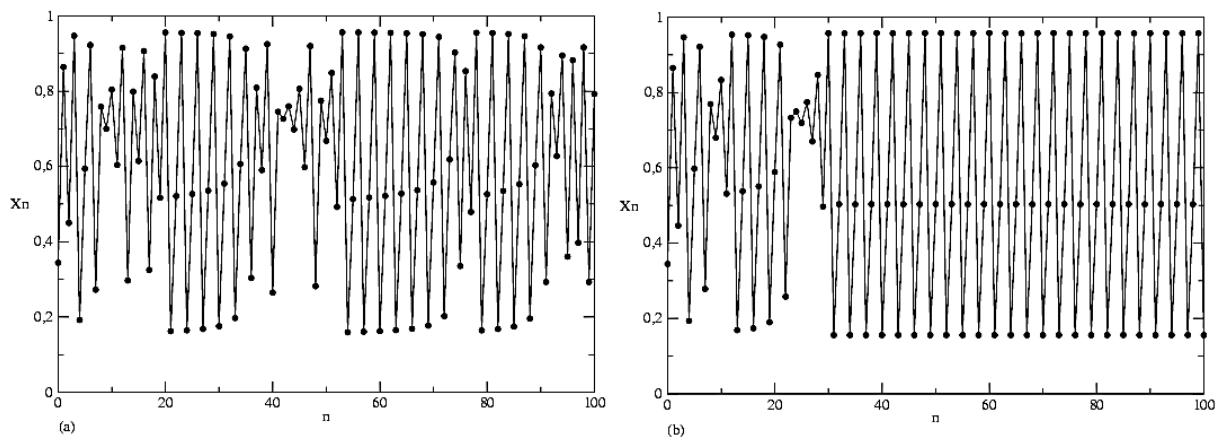


Figura 2: Iterações do mapa logístico (a) $R < R_c$ (b) $R > R_c$

Como em um ciclo de período p significa que depois de p iterações se retorna ao ponto de partida, logo, para identificar um ciclo de período $p = 3$ deve-se, portanto, considerar a 3ª iterada do mapa, ou seja, $F^{(3)}(x) = F(F(F(x)))$, com $F(x) = Rx(1 - x)$.

A Figura 3 (a) mostra o gráfico de $F^{(3)}$ para $R = R_c$, mostra ainda que para $R > R_c$ a bifurcação tangente já ocorreu e para o caso em que $R < R_c$ a bifurcação ainda não ocorreu, e é exatamente esse caso que nos interessa, pois é quando ocorre a intermitência. A Figura 3 (b) mostra a curva da função ligeiramente acima da identidade, instantes antes da bifurcação, formando uma espécie de “corredor” e a trajetória demora um tempo razoável para sair deste corredor.

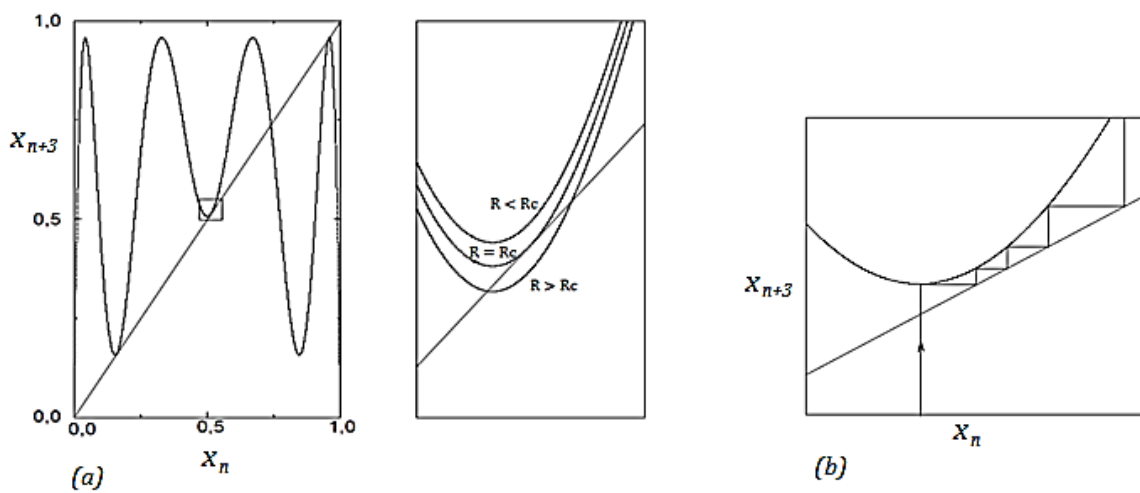


Figura 3: Gráfico de $F^{(3)}$ (a) comportamento da curva perto da identidade (b) trajetória atravessando o corredor

Fazendo $R - R_c = \mu$ e considerando o caso em que μ é bastante pequeno, as iterações sucessivas acumulam-se na parte mais estreita do corredor e a trajetória atravessa lentamente esse canal (Figura 3 (b)) fornecendo uma dinâmica que evolui pouco, correspondendo à fase *laminar* onde o movimento é *quasi*-periódico. Estatisticamente os comprimentos ou duração da fase laminar (l) foram calculados por Hirsch resultando numa lei de variação do comprimento máximo dada por $(\mu)^{-\frac{1}{2}}$, buscaremos então fazer um estudo analítico do problema e verificar se os resultados encontrados analiticamente estão de acordo com os resultados numéricos.

3. MATERIAL E MÉTODOS

No decorrer do trabalho fizemos o uso de computadores para auxiliar nas simulações numéricas, através das quais foi observada a evolução do sistema. Além disso, usamos técnicas para resolução de equações diferenciais para o tratamento analítico do problema.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para uma abordagem analítica do problema teríamos que analisar a função $F^{(3)}$, porém essa é uma função do 8º grau o que torna a análise um tanto quanto complicada e trabalhosa. Sendo assim reescreveremos essa função da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= RX_n(1 - X_n) = F(x_n) & X_{n+3} &= F^{(3)}(x_n), \quad n + 3 = m + 1 \\ X_{n+1} &= F(x_n) & X_{m+1} &= F^{(3)}(x_m) \end{aligned}$$

Fazendo uma expansão em Taylor, em torno de x^* e R_c e desconsiderando os termos de ordem superior e reordenando os termos temos:

$$\begin{aligned} G(x, R) = x_{m+1} &= x^* + (x_m - x^*) + a'\mu + (x_m - x^*)^2 b' & \frac{dy}{dm} &\approx \mu + ay^2 \\ \text{fazendo } \frac{x_{m+1} - x^*}{a'} &= y_{m+1} \text{ e } a = a'b' \text{ temos} & \frac{dy}{dm} &= \mu + ay^2 \\ y_{m+1} &= y_m + \mu + ay_m^2 & \int_0^l dm &= \int_{y_{in}}^{y_{out}} \frac{dy}{\mu + ay^2} \\ \frac{y_{m+1} - y_m}{(m+1) - m} &= \mu + ay_m^2 & & \end{aligned}$$

Resolvendo essa equação diferencial chegamos ao seguinte resultado:

$$l(y_{in}) = \frac{1}{\sqrt{a\mu}} \left[\arctg \left(\frac{y_{out}}{\sqrt{\mu/a}} \right) - \arctg \left(\frac{y_{in}}{\sqrt{\mu/a}} \right) \right]$$

Esse resultado representa o intervalo de tempo que o processo leva desde a sua entrada y_{in} até a sua saída y_{out} . É possível notar que para $y_{in} < 0$ (antes da entrada) l diverge com $1/\sqrt{\mu}$ no limite de μ pequeno, como discutido por Pomeau e Monneville.

5. CONCLUSÕES

Estudamos o fenômeno de intermitência no mapa logístico e tal estudo nos permitiu comparar a fenomenologia com a abordagem analítica aqui adotada. Verificamos analiticamente que $l \propto (\mu)^{-\frac{1}{2}}$, resultado este que está de acordo com os resultados numéricos presentes na literatura.

REFERÊNCIAS

- FIEDLER-FERRARA, N.; DO PRADO, C. P. C. Caos uma introdução. Editora Edgar Blücher LTDA, 1994.
- HIRSCH, J. E.; HUBERMAN, B. A.; SCALAPINO, D. J. Theory of intermittency. Physical Review A, New York, v. 25, p. 519–532, 1982.