8ª JORNADA CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA DO IFSULDEMINAS
5º Simpósio de Pós-Graduação

O ESTUDO DA CONSTANTE DE FEIGENBAUM

Flávio H. GRACIANO 1; Joelson D. V, HERMES 2; Edson D. LEONEL 3

RESUMO

O presente trabalho discute a observação feita por Feigenbaum na década de 70, quando ele percebeu que o mapa logístico apresentava um diagrama de bifurcação cujos os intervalos entre as bifurcações diminuíam de modo que cada intervalo era aproximadamente $\frac{1}{5}$ do intervalo anterior. Feigenbaum constatou que a razão de cada intervalo pelo intervalo posterior tende para uma constante e nós confirmamos essa constante usando recursos computacionais e o chamado Expoente de Lyapunov, que tem valor zero nos pontos de bifurcação.

Palavras-chave: Bifurcações, Constante, Feigenbaum

1. INTRODUÇÃO

O modelo logístico, descrito em 1976 pelo biólogo Robert May como uma forma de estudar a dinâmica de uma população de insetos, (MAY, 1976) dado por

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n), \tag{1}$$

bem como o modelo logístico-like (TEIXEIRA, 2015), dado por

$$x_{n+1} = Rx_n\left(1 - x_n^{\gamma}\right), com\, \gamma \geq 1 \tag{2}$$

são mapeamentos que seus gráficos de R em função de x apresentam uma cascata de bifurcação que foi o objeto de estudo desta pesquisa. As figuras 1 e 2, mostram os diagramas de bifurcação do modelo logístico e do logístico-like para $\gamma = 2$, neles podemos notar as bifurcações ocorridas em função da variação do parâmetro de controle R. Esses modelos ilustram muitas noções fundamentais de dinâmica não linear, apresentando equilíbrio, periodicidade, caos,

1 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes. Inconfidentes/MG e UNESP – Campus Rio Claro - E-mail: flavio.graciano@ifsuldeminas.edu.br.
2 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes. Inconfidentes/MG e UNESP – Campus Rio Claro - E-mail: Joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br.
3 UNESP – Campus Rio Claro - E-mail: edleonel@rc.unesp.br.

bifurcação e fractais. O modelo logístico é o mais estudado deles, muitos dos seus aspectos ainda não são rigorosamente entendidos por isso são estudos por muitos físicos e matemáticos.

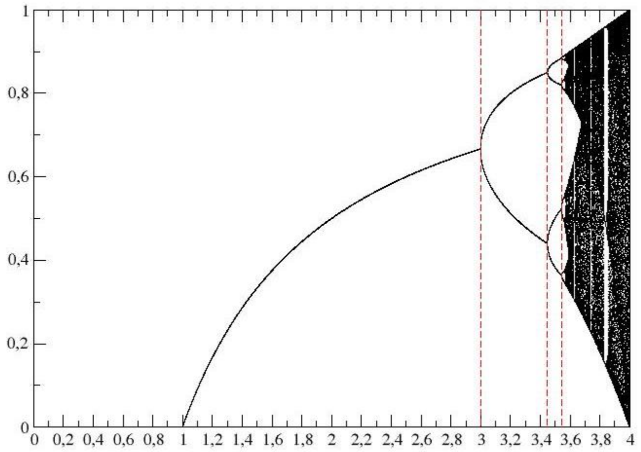

Figura 1. Diagrama de bifurcação do mapa logístico

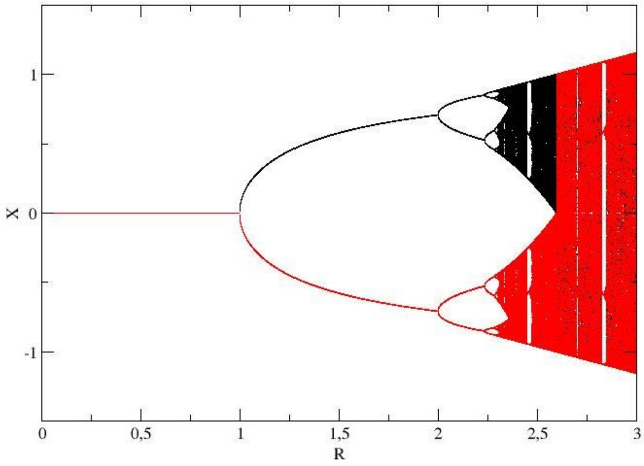

Figura 2. Diagrama de bifurcação para o mapa logístico-like para $\gamma = 2$.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A maior dificuldade ao calcular a constante de Feigenbaum para os mapas logístico e logístico-like como também em outros modelos com característica unimodal, está no método usado para encontrar os pontos de bifurcação das iterações de ordens elevadas. Para isso usamos o Expoente de Lyapunov (FERRARA, 1994), dado por

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} ln \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_i} \tag{3}$$

e lembramos que um ponto fixo é estável quando $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_i}\right| < 1$, e que nos pontos de bifurcação $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_i} = \pm 1$, logo nesses pontos o Expoente de Lyapunov é igual a zero uma vez que $ln|\pm 1| = 0$. Com base nisso trabalhamos para encontrar a constante de Feigenbaum para o mapa logístico e logístico-like para $\gamma = 2\ e\ \gamma = 3$.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Para desenvolvimento do trabalho, desenvolvemos um algoritmo na linguagem Fortran e estudamos o comportamento do expoente de Lyapunov em função do parâmetro R, através desse estudo conseguimos determinar os valores para os quais o expoente de Lyapunov é igual a zero. Os gráficos foram plotados com o uso do programa *Xmgrace*.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nas figuras 3 e 4 apresentamos simultaneamente os diagramas de bifurcação do mapa logístico e do mapa logístico-like com $\gamma = 2$, plotados juntamente com o gráficos de seus respectivos expoentes de lyapunov em função do parâmetro de controle R. Podemos identificar que com facilidade que na região onde o expoente é negativo temos regularidades no diagrama de bifurcação, onde é positivo temos caos e onde é zero temos os pontos de bifurcações.

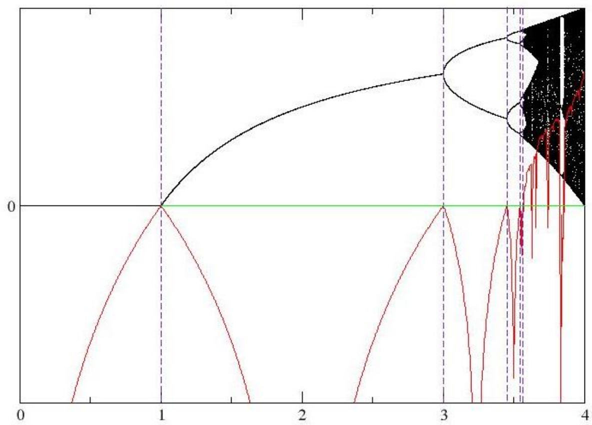

Figura 3. Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov para o mapa logístico.

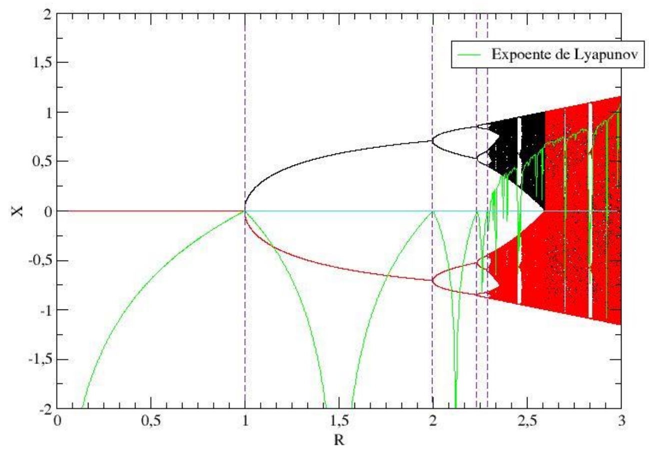

Figura 4. Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov para o mapa logístico-like para $\gamma = 2$.

Através de programação computacional, pudemos encontrar alguns pontos de bifurcação para os mapas logístico e logístico like com $\gamma = 2$ e $\gamma = 3$, fazendo a razão $\frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n}$, onde R_n, $R_{n+1,}R_{n+2}$ ... são pontos de bifurcação, constatamos que essa razão tente para $\delta = 4{,}669201609$ ..., valor conhecido como a constante de Feigenbaum. As tabelas 1 e 2 mostram os valores encontrados para o mapa logístico e logístico-like para $\gamma = 2$ com 8 casas decimais.

n	R_n	$R_n - R_{n-1}$	$\frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = \delta_n$
1	3	0,44948974	4,75147767
2	3,44948974...	0,09460000	4,65613278
3	3,54408974...	0,02031729	4,66820532
4	3,56440703...	0,00435227	4,66851522
5	3,56875930...	0,00093226	4,66830245
6	3,56969154...	0,00019970	4,67025257
7	3,56989124...	0,00004276	
8	3,56993400...		

Tabela 1. Tabela de valores para cálculo da constante de Feigenbaum para o mapa logístico.

n	R_n	$R_n - R_{n-1}$	$\frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = \delta_n$
1	2	0,23606683	4,54280000
2	2,23606683...	0,05119639	4,57213125
3	2,28803077...	0,11197080	4,66335144
4	2,29922785...	0,00240108	4,67700339
5	2,30162893...	0,00051338	4,66158176
6	2,30214313...	0,00011023	
7	2,30225336...		

Tabela 2. Tabela de valores para cálculo da constante de Feigenbaum para o mapa logístico-like para $\gamma = 2$.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho pudemos confirmar, de maneira satisfatória, usando o expoente de Lyapunov, a constante de encontrada por Feigenbum na década de 70 para o mapa logístico e mostrar que essa constante também é válida para o mapa logístico-like.

AGRADECIMENTOS

Grupo de Pesquisa em Dinâmica Não-Linear da Unesp- Rio Claro.

REFERÊNCIAS

FIEDLER-FERRARA, N.; DO PRADO, C. P. C. **Caos uma introdução**. Editora Edgar Blücher LTDA, 1994.

MAY. R.M. **Simple mathematical models with very complicade dynamics**. Nature, 261 (5560):459.

TEIXEIRA R.M., et al. **Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scaling investigation**. Phys. Lett. A 379 (2015) 1246.