10ª Jornada Científica e Tecnológica
7º Simpósio da Pós-Graduação
INSTITUTO FEDERAL Sul de Minas Gerais
ISSN 2319-0124

CONVERGÊNCIA PARA O ESTADO ESTACIONÁRIO APÓS A BIFURCAÇÃO TANGENTE NO MAPA LOGÍSTICO

Joelson D. V. HERMES[1]; Carlos E. de P. ABREU[2]; Flávio H. GRACIANO[3]

RESUMO

Neste trabalho exploramos a evolução em direção ao equilíbrio perto de uma bifurcação tangente no mapa logístico, mais precisamente após a bifurcação. Para esse caso a convergência para o estado estacionário obedece a uma lei exponencial, através da qual determinamos o expoente de relaxação, utilizando duas abordagens distintas, uma numérica e outra de forma analítica.

Palavras - chave: Caos; Sistemas Dinâmicos; Dinâmica Não-linear.

1. INTRODUÇÃO

O estudo qualitativo dos sistemas dinâmicos não-lineares sofreu uma modificação radical entre as décadas de 1960 e 1970. Isso ocorreu devido ao desenvolvimento de novas tecnologias e principalmente ao uso dos computadores como um ambiente de pesquisa científica e não mais como simples máquinas de calcular. Tal modificação foi tão radical que pode-se considerar ter havido uma “revolução” no estudo de sistemas dinâmicos; com isso, uma enorme quantidade de pesquisadores aderiram a essa “nova ciência” (STEWART, 1991).

O estudo de caos trouxe a assustadora compreensão de que equações matemáticas simples poderiam servir de modelo para sistemas tão violentos. Iniciava-se aí o moderno estudo do caos, cujas ideias haviam sido lançadas por Poincaré (GLEICK, 1987).

Apesar de ser tratado por muitos como “Teoria do Caos”, o que estipulou chamar de caos é uma coleção de resultados abstratos e métodos computacionais, a maior parte tendo uma abordagem geométrica, que são aplicáveis ao estudo de equações diferenciais não lineares e mapeamentos (HOLMES, 1989).

Propomos nesse trabalho investigar um dos mapeamentos mais conhecidos nessa área, o Mapa Logístico, o mapeamento em questão apresenta uma série de comportamentos dinâmicos relevantes, dentre os quais incluem-se regularidade, rotas para o caos, assim como diversos tipos de bifurcações, certamente um dos conceitos centrais em sistemas dinâmicos.

[1] IFSULDEMINAS – *Campus* Inconfidentes. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br.
[2] IFTO – *Campus Araguatins*. E-mail: Carlos.abreu@ifto.edu.br.
[3] IFSULDEMINAS – *Campus Pouso alegre*. E-mail: Flávio.graciano@ifsuldeminas.edu.br.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O mapa logístico é um modelo matemático que foi descrito em 1976 pelo pesquisador Robert May, com o objetivo de modelar o crescimento populacional anual de espécies de insetos. O modelo proposto por May foi historicamente importante para mostrar que sistemas extremamente simples poderiam ter comportamento extremamente complexo. Este mapeamento é uma equação determinística, ou seja, sua situação futura será determinada pelas condições presentes. Tal mapa é escrito da seguinte forma

$$x_{n+1} = F(x_n) = Rx_n(1 - x_n) \tag{1}$$

onde x_n é o número de indivíduos da população na n-ésima geração e $R \in [0,4]$ é o parâmetro de controle (MAY, 1976).

O aparecimento de caos em sistemas dinâmicos está sempre ligado à ocorrência de bifurcações de algum tipo. No mapa logístico está presente, dentre outros tipos de bifurcações, a bifurcação sela-nó, também conhecida como bifurcação tangente.

Em trabalhos anteriores fizemos um estudo do mapa logístico antes da bifurcação tangente e no ponto de bifurcação, determinando os expoentes críticos que a caracterizam, nesse trabalho investigaremos o comportamento do mapa após a bifurcação.

3. MATERIAL E MÉTODOS

No decorrer do trabalho fizemos o uso de computadores para auxiliar nas simulações numéricas, através das quais foi observada a evolução do sistema. Além disso, usamos técnicas para resolução de equações diferenciais para o tratamento analítico do problema.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A convergência para o ponto fixo é descrita pela variável y, a qual representa a distância para o ponto fixo. Essa convergência ainda deve depender do número de iterações m, da condição inicial y_0 e do parâmetro $\mu = R_c - R$. Em trabalhos anteriores estudamos os casos em que $\mu > 0$, ou seja, antes da bifurcação e $\mu = 0$ quando estávamos na bifurcação. Nossa proposta agora é estudar o caso em que $\mu < 0$, isto é, depois da bifurcação.

A convergência para o estado estacionário depois que a bifurcação ocorreu é marcada por uma lei exponencial do tipo

$$y(m, \mu) \propto e^{-m/\tau}, \tag{2}$$

em que τ é o tempo de relaxação descrito por

$$\tau \propto \mu^{\delta}, \tag{3}$$

onde δ é um expoente de relaxação (TEIXEIRA, 2015).

A Figura 1 mostra o comportamento de τ versus μ e um ajuste em lei de potência fornece-nos o expoente $\delta = -0{,}54(3)$.

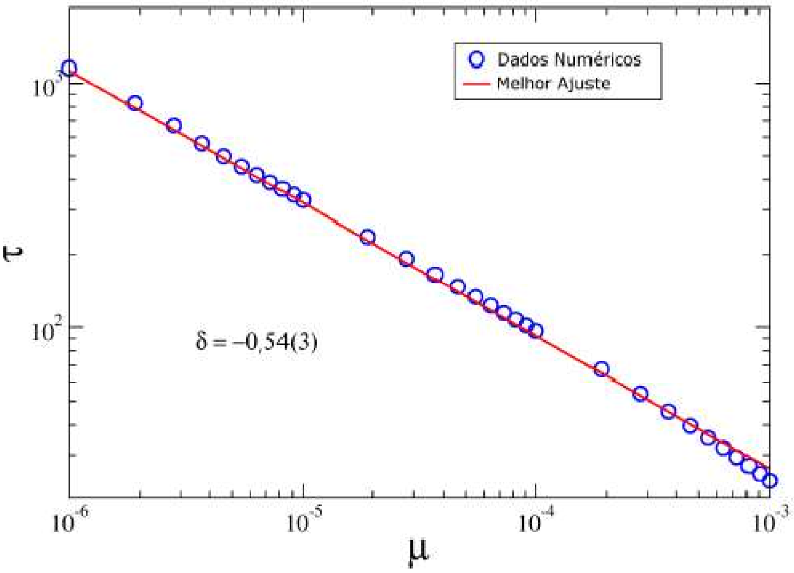

Figura 1: Gráfico do tempo de relação para o ponto fixo em função de μ.

O tratamento analítico é feito considerando a função $F^{(3)} = G(x,R)$, onde $F^{(3)}$ representa a terceira composição da equação (1); com isso faremos uma expansão em Taylor da função $G(x,R)$ em torno do ponto fixo x^* e do R_c crítico, chamando $-\frac{\partial G}{\partial R}\Big|_{x^*,R_c} = a'$ e $\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Big|_{x^*,R_c} = b'$ e reordenando os termos chegamos a seguinte expressão

$$y_{m+1} = y_m + \mu + a y_m^2, \tag{4}$$

onde $y_{m+1} = \frac{x_{m+1} - x^*}{a'}$ e $a = \frac{b'}{a'}$.

A equação (4) pode ser escrita como uma equação de diferenças e em seguida aproximada por uma equação diferencial da seguinte forma

$$\frac{y_{m+1} - y_m}{(m+1) - m} = \mu + a y_m^2, \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dm} \approx \mu + a y_m^2. \tag{6}$$

Resolvendo a equação diferencial (6) chegamos ao seguinte resultado

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{a\mu}}\left[arctan\left(\frac{y_m}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}}\right) - arctan\left(\frac{y_0}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}}\right)\right], \tag{7}$$

analisando esse resultado é possível notar que τ diverge como $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ no limite de μ pequeno. Assim, temos

$$\tau \propto \mu^{-\frac{1}{2}},$$

chegando a $\delta = -\frac{1}{2}$, o que confirma o resultado encontrado numericamente.

5. CONCLUSÕES

Notamos que o decaimento para o estado estacionário é marcado por uma lei exponencial do tipo $y(m, \mu) \propto e^{-\frac{m}{\tau}}$, onde τ é o tempo de relaxação descrito por $\tau \propto \mu^{\delta}$, sendo que nossos estudos mostraram que o expoente de relaxação $\delta = -\frac{1}{2}$ usando uma abordagem analítica o que confirma o resultado encontrado numericamente.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.

NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.

REFERÊNCIAS

GLEICK, J. Chaos: Making a New Science. Penguin Books, New York, NY, USA, 1987.

HOLMES, P.. Nonlinear dynamics, chaos and mechanics. Applied Mechanics Review, 43:23 { 29, 1989.

MAY, R. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, 261:459 { 467, 1976.

STEWART, I. Será que Deus joga dados?: A nova matemática do caos. ZAHAR, 1991.

TEIXEIRA, R. M. N., et.al.. Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation. Physics Letters A, 379: 1246 - 1250, 2015.