10ª Jornada Científica e Tecnológica
7º Simpósio da Pós-Graduação
ISSN 2319-0124

DINÂMICA CAÓTICA NO MAPA LOGÍSTICO

Anderson A. A. da SILVA[1]; Juliano A. de OLIVEIRA[2]; Joelson D. V. HERMES[3]

RESUMO

Neste trabalho consideramos o estudo de algumas propriedades dinâmicas no mapa logístico. Definido o modelo, construímos numericamente o diagrama de bifurcações para avaliar o comportamento do sistema dinâmico, de modo que regiões regulares e caóticas são observadas. Para ilustrar o comportamento caótico o cálculo dos expoentes de Lyapunov são considerado. Uma abordagem analítica dos expoentes de Lyapunov são apresentada e o resultado numérico é comparado com o diagrama de bifurcações. O procedimento apresentado é geral e pode ser aplicado em outros problemas descritos por mapas unidimensionais.

Palavras-chave: Caos; Sistemas dinâmicos; Expoente de Lyapunov.

1.INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos são sistemas fora de equilíbrio, que são caracterizados por estados que mudam com o tempo. São usados para modelar e fazer previsões de sistemas físicos, biológicos, financeiros, etc. O Fato é que muitos desses sistemas podem exibir comportamento caótico, (SILVA, 2017). No estudo de sistemas dinâmicos, muitas vezes fazemos uso de mapeamentos discretos para caracterizar a evolução do sistema. Um bom exemplo de mapeamento unidimensional é o bem conhecido mapa logístico, descrito em 1976 pelo biólogo Robert May com uma aplicação direta em Biologia.

O nosso principal objetivo neste trabalho consiste em retratar a propriedade do expoente de Lyapunov e aplicar o mesmo no mapa logístico. Umas das principais características do mapa logístico é a sensibilidade as condições inicias, o que leva ao que é chamado de rotas para o caos, onde podemos fazer uso do expoente de Lyapunov, já que o mesmo é utilizado como indicador de caos, e são obtidos a partir da distância das trajetórias de duas condições próximas (HERMES, 2018).

[1] Universidade Estadual Paulista "Júlio De Mesquita Filho" – Campus Rio Claro.
E-mail: andersonantsilva1@gmail.com

[2] Orientador, Universidade Estadual Paulista– Campus São João da Boa Vista.
E-mail: juliano.antonio@unesp.br

[3] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes.
E-mail: Joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br

.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A principal característica de sistemas caóticos é a sensibilidade ás condições iniciais. Existem vários métodos para caracterizar um sistema caótico, dentre eles um método eficiente que se destaca é o expoente de Lyapunov. Tais expoentes são utilizados como indicador de caos e são obtidos a partir de uma distância das trajetórias de duas condições iniciais distintas. Segundo (FIELDLER FERRARA, 1994) a definição dos expoentes de Lyapunov para mapas unidimensionais é dada da seguinte forma:

Seja o mapa unidimensional discreto escrito como:

$$x_{n+1} = F(x_n). \qquad (1)$$

Consideremos dois pontos iniciais x_0 e y_0, onde a distância inicial entre eles é dada por:

$$\delta_0 = |y_0 - x_0| \, , \qquad (2)$$

após uma iteração a nova distância é:

$$\delta_1 = |y_1 - x_1|, \qquad (3)$$

tal que, na n-ésima iterada a n-ésima distância pode ser representada por:

$$\delta = e^L \delta, \qquad (4)$$

onde L mede a taxa exponencial de expansão da distância até a distância δ_1 como resultado de apenas uma iteração. Como temos que $y_1 = F(y_0)$ e $x_1 = F(x_0)$. Assim podemos reescrever a equação (4) como:

$$\delta_1 = |F(y_0) - F(x_0)|, \qquad (5)$$

da equação (2) temos que:

$$\delta_1 = |F(x_0 + \delta) - F(x_0)|, \qquad (6)$$

Após a n-ésima iterada do mapa tem-se:

$$|F^N(x_0 + \delta) - F^N(x_0)| = |d| e^{NL}, \qquad (7)$$

Após algumas manipulações algébricas, podemos reescrever a equação (7) da seguinte forma:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N=1} ln\left|F'(x_i)\right|, \qquad (8)$$

Onde $F'(x_i)$ é a derivada do mapa considerado.

A equação (8) representa a definição do expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais, e constitui uma medida da divergência exponencial se $\lambda > 0$ ou da contração se $\lambda < 0$, ou seja, quanto maior o valor de λ mais caos o sistema apresentará e analogamente quanto menor for o valor de λ mais periódico o sistema será. Vale a pena ressaltar que quando $\lambda = 0$ ocorrem os pontos de bifurcações.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Para o desenvolvimento deste trabalho, usamos linguagem de programação FORTRAN para realizar simulações numéricas, utilizamos também o software XMGRACE na construção das figuras.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A fim de fazer uma análise do comportamento caótico do diagrama do mapa logístico construímos o diagrama de bifurcação juntamente com o diagrama do expoente de lyapunov, conforme mostramos na figura 1 (a) e (b) respectivamente.

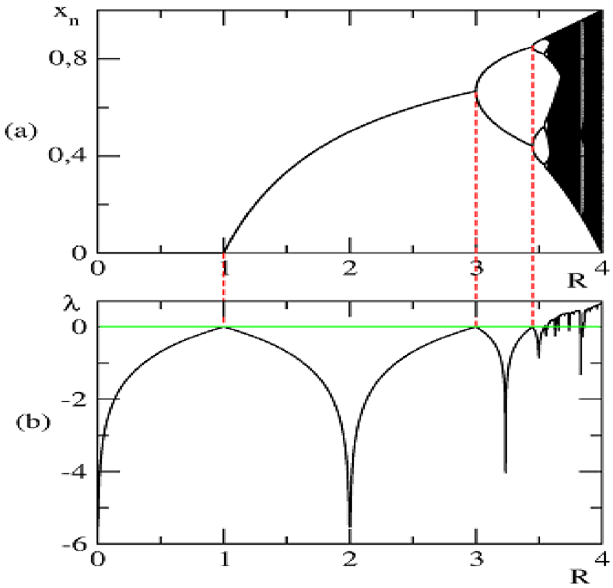

Figura 1: (a) diagrama de bifurcação do mapa logístico; (b) expoente de Lyapunov.

Analisando o resultado mostrado na figura 1 é possível notar que nos pontos de bifurcações observados na figura 1(a) os expoentes de Lyapunov são iguais a zero conforme observamos na figura 1(b). Nos intervalos em que os expoentes de Lyapunov são positivos o mapa apresenta um comportamento caótico e onde os mesmos são negativos o mapa apresenta regularidade

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho consideramos o mapa logístico e construímos o diagrama de bifurcações para avaliar o comportamento do sistema. Para identificar comportamentos regulares e caóticos calculamos numericamente os expoentes de Lyapunov.

AGRADECIMENTOS

Ao grupo de pesquisa em sistemas complexos e dinâmica não linear da UNESP - Rio Claro.

REFERÊNCIAS

FIEDLER-FERRARA, Nelson; DO PRADO, CP Cintra. **Caos: uma introdução.** São Paulo: Edgar Blucher, 1994.

HERMES, Joelson Dayvison Veloso. **Investigação de escala para a bifurcação tangente no mapa logístico, 2018**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista – Rio Claro.

SILVA, Anderson Antônio Aparecido da Silva. **Estudo do mapa logístico: Uma análise de estabilidade, 2017**. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Inconfidentes.