10ª Jornada Científica e Tecnológica
7º Simpósio da Pós-Graduação
INSTITUTO FEDERAL Sul de Minas Gerais
ISSN 2319-0124

MAPA LOGÍSTICO PERTURBADO

Júlia G. de S. ROCHA[1]; Joelson D. V. HERMES[2]; Flávio H. GRACIANO[3]

RESUMO

Neste trabalho propomos a inserção de uma perturbação na equação do Mapa Logístico e com isso analisar quais as mudanças na dinâmica do sistema foram provocadas por tal perturbação. Fizemos uma comparação entre o diagrama de bifurcação do mapa logístico com e sem a perturbação. Por fim fizemos um estudo sobre o tempo de transiente do mapa. Percebemos que a inserção da perturbação provocou uma descontinuidade no diagrama de bifurcação do mapa e que próximo dessa descontinuidade a órbita fica presa por um certo intervalo de tempo.

Palavras-chave: Caos; Sistemas Dinâmicos, Dinâmica Populacional.

1. INTRODUÇÃO

A principal proposta do trabalho consiste em descrever e compreender algumas das diversas características presentes no Mapa Logístico Perturbado, uma vez que a equação apresentada por tal mapa é repleta de conhecimentos matemáticos relevantes. Tem-se como objetivo neste estudo investigar os efeitos e as consequências da perturbação na dinâmica, que provavelmente terá como resultado um comportamento caótico, uma vez que tal mapa apresenta uma sensibilidade às condições iniciais nele impostas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O Mapa Logístico foi descrito em 1976 pelo pesquisador Robert May através de um modelo matemático que tinha como objetivo modelar o crescimento populacional anual de algumas espécies de insetos. Como tal modelo apresentaria o crescimento de uma espécie, diversas condições poderiam interferir nesse crescimento populacional, a não-linearidade introduzida por May neste estudo prevê que, à medida que a população se tornasse maior, os insetos iriam esgotar seus alimentos, acarretando assim na morte de alguns deles, o que por sua vez, diminuiria no

[1]Bolsista PIBIC, IFSULDEMINAS – *Campus Inconfidentes*. E-mail: juliagabrielerocha@hotmail.com.
[2]Orientador, IFSULDEMINAS – *Campus Inconfidentes*. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br.
[3]Colaborador, IFSULDEMINAS – *Campus* Pouso Alegre. E-mail: Flávio.graciano@ifsuldeminas.edu.br.

crescimento populacional desta espécie. Tal mapeamento é descrito como,

$$X_{n+1} = RX_n(1 - X_n), \tag{1}$$

onde, X_n representa o número de indivíduos e R é um parâmetro de controle (MAY, 1976).

Este mapeamento proposto por May ilustra uma equação determinística, ou seja, as condições futuras de tal mapa serão dadas pelas condições iniciais inseridas na equação. O fato que chamou atenção de Robert May foi o de que o comportamento deste mapa varia drasticamente conforme os diferentes valores atribuídos a R inicialmente, passando de regular a caótico apenas com uma pequena alteração desse parâmetro (FIELDLER-FERRARA, 1994).

O mapa logístico tem aplicação em diversas áreas do conhecimento, assim o Mapa Logístico Perturbado vem contribuir e aumentar a gama de problemas que podem ser modelados por essa equação, fazendo com que cada vez mais possamos descrever de maneira mais satisfatória o comportamento de sistemas dessa natureza.

O mapa logístico perturbado é descrito pela seguinte equação,

$$X_{n+1} = R_n X_n(1 - X_n), \tag{2}$$

com $R_n = R + \varepsilon f(n)$, em que $f(n)$ é uma função periódica e ε é o valor da perturbação. Para $\varepsilon = 0$ temos o mapa logístico convencional e para $\varepsilon \neq 0$, temos o mapa logístico dependente do tempo. À medida que o parâmetro R_n varia, os atratores podem aparecer ou mudar sua estabilidade, o que ocasiona a imprevisibilidade do comportamento da dinâmica (LEONEL, 2001).

3. MATERIAL E MÉTODOS

A fim de analisar as alterações provocadas pela perturbação inserida no mapa, fizemos o diagrama de bifurcação tanto para o Mapa Logístico, representado na Figura 1 (a), como para o Mapa Logístico Perturbado, Figura 1 (b). Para o Mapa Logístico Perturbado utilizamos como condição inicial $X_0 = 0{,}5$ e a perturbação $\varepsilon = 0{,}01$, além disso, adotamos $f(n) = \cos(n\pi)$.

Para a obtenção dos resultados numéricos escrevemos um algoritmo em Fortran através do qual foi possível fazer as simulações presentes no trabalho. Os gráficos foram gerados através do software Xmgrace.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Analisando os diagramas de bifurcação é fácil perceber que a inclusão da perturbação no mapa foi responsável por uma descontinuidade no mesmo. Durante as simulações foi possível perceber que o mapeamento passou a ser sensível às condições iniciais, ou seja, para condições iniciais diferentes o mapa apresentava mudanças no seu diagrama de bifurcação, fato esse que não acontecei para o mapa logístico convencional (LEONEL, 2001).

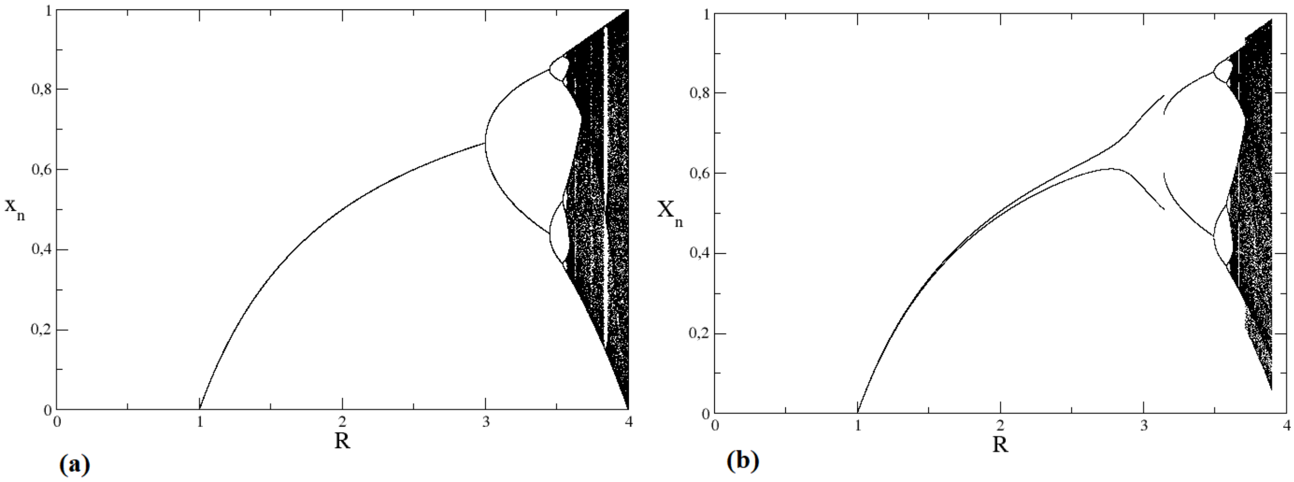

Figura 1: Diagrama de bifurcação para (a) Mapa Logístico com $X_0 = 0{,}5$. (b) Mapa Logístico Perturbado para $X_0 = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}01$.

Foi feita um análise para valores de R próximo da descontinuidade apresentada no diagrama e com isso foi possível perceber que a órbita fica “presa” por um certo período de tempo até decair para o ponto fixo. A Figura 2 mostra a evolução da órbita para R próximo da descontinuidade, através dela é possível perceber que a órbita fica presa por um número grande de iterações até que ela escapa e decai para o ponto fixo, tal comportamente é semelhante ao fenômeno de intermintência encontrado em outros mapeamentos. Na Figura 2 ainda destacamos o ponto de transição, ou seja, o momento que a órbita passa se um ramo do ponto fixo para o outro.

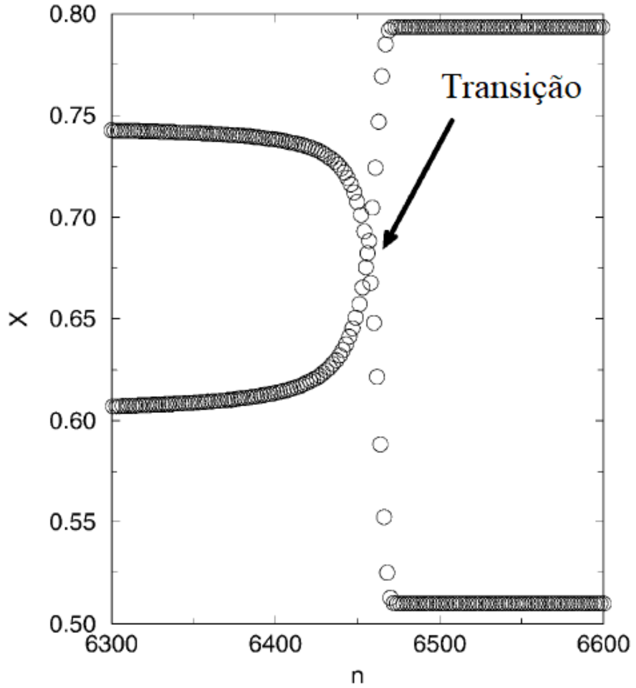

Figura 2: Órbita para R próximo da descontinuidade.

As simulações nos mostraram que o tempo, número de iterações, que órbita fica presa depende da distância que estamos do valor crítico de R, ou seja, quanto mais próximo da descontinuidade mais tempo a órbita leva para decair. Pretendemos no futuro estudar melhor esse comportamento e descobrir em que medida essa proximidade da descontinuidade influencia no decaimento para o ponto fixo.

5. CONCLUSÕES

A comparação entre o diagrama de bifurcação dos mapas nos mostrou que a inclusão da perturbação provocou o aparecimento de uma descontinuidade, além de fazer com que o mapeamento ficasse sensível às condições iniciais. Notamos que nas proximidades da descontinuidade a órbita fica presa por um certo intervalo de tempo e que esse tempo é proporcional a distância que nos encontramos da bifurcação, semelhante ao que ocorre no fenômeno de intermitência. Ainda não conseguimos determinar essa proporcionalidade mas acreditamos que em breve teremos esse resultado, além disso buscaremos em trabalhos futuros apresentar uma abordagem analítica para o problema.

REFERÊNCIAS

FIELDLER-FERRARA. N., PRADO, C. P.C. Caos: Uma introdução. São Paulo: Blucher, 1994.

MAY. R.M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, 261 (5560): 459.

LEONEL D. E. Transients in a time-dependent logistic map. Physica A, 295 (2001) 280-284.