

DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE DE FEIGENBAUM VIA MAPA HASSELL

Fábio H. da COSTA¹; Joelson D. V. HERMES²; Flávio H. GRACIANO³

RESUMO

O intuito do presente trabalho é utilizar os expoentes de Lyapunov para a determinação da constante de Feigenbaum para o Mapa Hassell, além disso, discutiremos o conceito de bifurcação assim como as rotas de duplicação de período que levam ao caos.

Palavras - chave: Caos; Sistemas Dinâmicos; Dinâmica não Linear.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos é de grande importância na área da Biologia, Física, Matemática, Química e entre outros ramos do conhecimento, pois, por meio de equações matemáticas possibilita os estudos de processos em evolução, onde o objetivo é criar uma teoria que permita a compreensão e visualização de um sistema no decorrer do tempo. (SILVA, 2017).

No estudo de sistemas dinâmicos, muitas vezes fazemos uso de mapeamentos discretos para caracterizar a evolução do sistema, em que o tempo é uma variável discreta, ou seja, só assume valores inteiros. Um mapeamento discreto é uma regra de evolução determinística discreta para um dado sistema, aqui estudaremos o Mapa Hassell, o mapeamento em questão apresenta uma série de comportamentos dinâmicos relevantes, dentre os quais incluem-se regularidade, rotas para o caos, assim como diversos tipos de bifurcações, certamente um dos conceitos centrais em sistemas dinâmicos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O mapa Hassell é um mapa unidimensional não-linear discreto definido pela equação:

$$N_{n+1} = \frac{rN_n}{(1 + aN_n)^\gamma}, \quad (1)$$

onde a , r e γ são parâmetros de controle.

Quando evoluímos duas condições iniciais próximas elas podem se afastar ao longo da

¹Bolsista PIVIC, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: fhc961@hotmail.com.

²Orientador, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: joelson.hermes@ifsulde Minas.edu.br.

³Colaborador, IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre. E-mail: flavio.graciano@ifsulde Minas.edu.br.

trajetória do espaço de fase, ou seja, ao evoluirmos a dinâmica no tempo duas condições iniciais que estavam próximas podem se afastar de maneira exponencial. Para avaliarmos essa dispersão entre as condições iniciais, usamos os expoentes de Lyapunov. O expoente de Lyapunov para o sistema dinâmico é um indicador de caos e é obtido a partir da distância de duas condições iniciais distintas.

Para o sistema ser considerado estável, duas trajetórias vizinhas permanecem próximas durante todo o tempo e isto implica que a mesmas não são sensíveis às condições iniciais e temos que o expoente de Lyapunov $\lambda < 0$. Se as trajetórias divergem exponencialmente e apresentam sensibilidade as condições iniciais diz-se que o expoente de Lyapunov $\lambda > 0$. Quando as trajetórias apresentam expoente de Lyapunov $\lambda > 0$ elas são classificadas como caóticas.

Na década de 70, Feigenbaum ao estudar o comportamento do mapa logístico variando o parâmetro de controle R , observou que esse sistema dinâmico convergia para um valor apenas quando R está entre 1 e 3. Para um R entre 3 e 3.45, convergia para dois, quando R estava entre 3.45 e 3.54, convergia para quatro possibilidades e entre 3.54 e 3.56 tinha oito possibilidades, ou seja aconteciam duplicações de período com o aumento do parâmetro R . Feigenbaum percebeu que esses valores aumentavam exponencialmente, e que o intervalo de R em que eles aconteciam ficavam cada vez menores. Além disso, notou que depois de um valor de R tornava-se impossível prever os valores desse sistema (GRACIANO, 2016).

3. MATERIAL E MÉTODOS

Os dados foram obtidos após simulações numéricas por meio de um algoritmo escrito em Fortran e com a ajuda do software Xmgrace foi possível analisar os gráficos e minuciosamente coletar os resultados necessários para a conclusão do trabalho.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Segundo Feigenbaum os valores de R para os quais ocorrem as bifurcações de duplicação de período obedecem à seguinte expressão,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = \delta_n \quad (3)$$

onde δ é a constante que dá medida de quanto a diferença entre os valores do parâmetro de controle associado a duas bifurcações sucessivas é reduzida, dando uma ideia da “velocidade” com que o caos é atingido. Essa constante vale $\delta = 4,6692016091029909 \dots$ e só pode ser determinada numericamente (FEIGENBAUM, 1979).

Surpreendentemente essa constante é universal para sistemas que apresentam esse tipo de rota para o caos, rota de duplicação de período, dessa forma propomos aqui a determinação dessa constante para o Mapa Hassell a fim de verificarmos a validade dessa constante também para esse

mapeamento. Em geral é difícil determinarmos os valores de R para os quais ocorrem as bifurcações de duplicação de período, principalmente para períodos maiores, assim o mecanismo que usaremos para determiná-la são os expoentes de Lyapunov, da seguinte forma: uma vez que o expoente de Lyapunov se anula nos pontos de bifurcação, como pode ser visto na Figura 1, fizemos uma varredura no valor desse expoente no intervalo de $R \in [0,4]$ e verificamos os valores de R para o qual os expoentes de Lyapunov eram iguais a zero, o resultado é apresentado na Tabela 1.

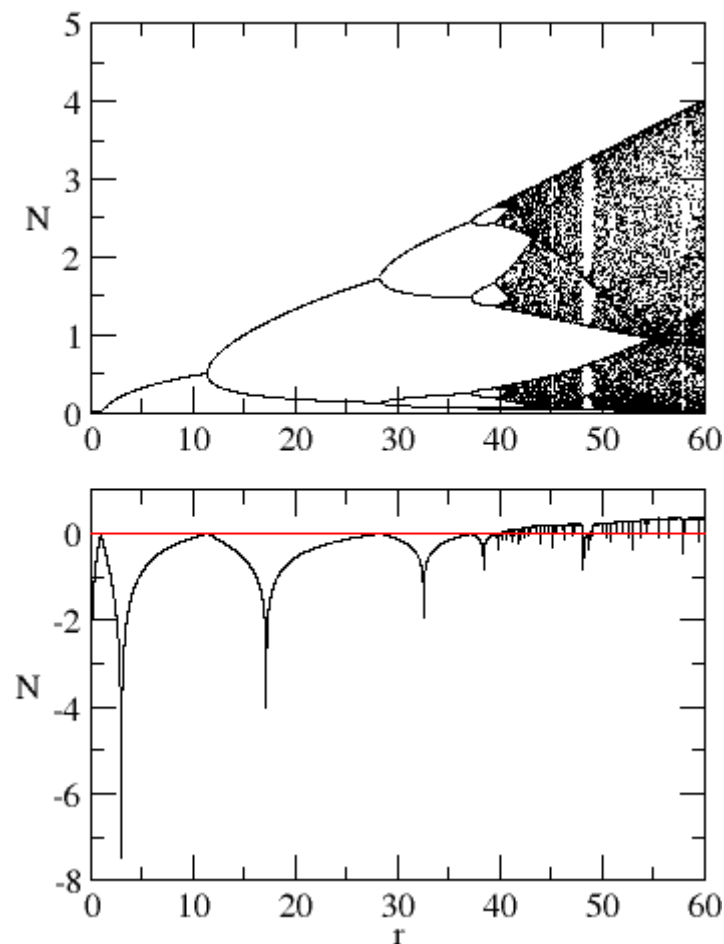


Figura 1: Diagrama de Bifurcação e Expoente de Lyapunov do mapa Hassell.

n	R_n	$R_n - R_{n-1}$	$\frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = \delta_n$
1	11,39060000	16,94950000	1,915327593
2	28,34010000	8,84940000	3,747300490
3	37,18950000	2,36154000	4,426505047
4	39,55104000	0,53349990	4,616684450
5	40,08453990	0,11555910	4,661024401
6	40,20009900	0,02479264	4,665690595
7	40,22489164	0,00531382	4,667878916
8	40,23020546	0,00113838	
9	40,23134384		

Tabela 1: Valores de R onde ocorrem as bifurcações de período e determinação da constante δ .

De acordo com os resultados da Tabela 1 chegamos ao seguinte valor de δ ,

$$\delta = 4,667878916.$$

Durante as simulações foi possível notar que a medida que o número de períodos aumenta a determinação dos valores de R requerem uma precisão cada vez maior e consequentemente o gasto computacional aumenta significativamente.

5. CONCLUSÕES

O método utilizado para determinar a constante de Feigenbaum nos permitiu determinar essa constante com boa precisão, além disso, constatamos a validade dessa constante para mais um mapeamento, no caso o Mapa Hassell. O estudo também permitiu que aprofundássemos nos estudos sobre o expoente de Lyapunov, o qual é muito importante no estudo de sistemas dinâmicos e caos. Acreditamos que os resultados encontrados representam uma contribuição para área uma vez que não se encontra na literatura trabalhos que abordam diretamente esse assunto e que conseguiram determinar essa constante para esse mapa.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.
NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.
Grupo de Pesquisa em Dinâmica Não Linear da Unesp- Rio Claro.

REFERÊNCIAS

COSTA, Fábio Henrique da; SILVA, Anderson Antônio Aparecido da; HERMES, Joelson Dayvison Veloso. **ESTUDO DO MAPA HASSELL: Uma análise da influência dos parâmetros**. 2017.

FEIGENBAUM, M. J. **The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations**. J. Stat. Phys. 21, 669-706, 1979.

GRACIANO, Flávio Heleno. **ESTUDO DA CONSTANTE DE FEIGENBAUM**. 2016. 13 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de São João Del-rei, São João Del-rei, 2016.

SILVA, Anderson Antônio Aparecido da; COSTA, Fábio Henrique da; HERMES, Joelson Dayvison Veloso. **ESTUDO DO MAPA LOGÍSTICO**. 2017.