10ª Jornada Científica e Tecnológica
7º Simpósio da Pós-Graduação
INSTITUTO FEDERAL Sul de Minas Gerais
ISSN 2319-0124

MAPA LOGÍSTICO-LIKE: Uma Generalização do Mapa Logístico

Luam S. PAIVA[1]; Joelson D. V. HERMES[2]; Flávio H. GRACIANO[3]

RESUMO

O presente trabalho apresenta o Mapa Logístico-Like o qual é uma generalização do tão conhecido Mapa Logístico. Seus primeiros pontos fixos são determinados analiticamente e na sequência é feita a análise de estabilidade de tais pontos. Destacamos os casos em que $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$, onde traçamos o diagrama de bifurcação para ambos os casos indicando alguns dos tipos de bifurcações presentes no mapeamento.

Palavras - chave: Caos; Sistemas Dinâmicos, Dinâmica Não-linear

1. INTRODUÇÃO

O mapa logístico é um modelo matemático que foi descrito em 1976 pelo biólogo Robert May, com uma aplicação direta em Biologia (MAY, 1976). Tal mapa é descrito pela equação

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n).$$

Uma vez que essa equação logística possui muitas virtudes, como o fato de ser acessível e mesmo assim ilustrar muitas noções de dinâmica não linear (FEIGENBAUM, 1979), ela ainda apresenta uma matemática cheia de vida e riqueza onde muitos aspectos ainda não são rigorosamente entendidos e são estudados por alguns dos melhores matemáticos da atualidade. Como se não bastasse, o mapa logístico possui aplicações diretas em química, engenharia, matemática e em muitos outros tópicos (TEIXEIRA, 2015).

Neste trabalho estudaremos a dinâmica do mapa logístico-like, o qual é uma generalização do mapa logístico e é dado por

$$x_{n+1} = Rx(1 - x_n^{\gamma}), \text{ com } \gamma \geq 1$$

onde x_n é o número de indivíduos na n-ésima geração e R um parâmetro de controle. No caso em que $\gamma = 1$ retornamos ao Mapa Logístico.

2. MATERIAL E MÉTODOS

No decorrer do trabalho fizemos o uso de computadores para auxiliar nas simulações numéricas, através das quais foi observado a evolução do sistema. Além disso, fizemos o

[1]Bolsista PIVIC, IFSULDEMINAS – *Campus* Inconfidentes. E-mail: paivaluan41@gmail.com.
[2]Orientador, IFSULDEMINAS – *Campus Inconfidentes*. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br.
[3]Colaborador, IFSULDEMINAS – *Campus* Inconfidentes. E-mail: flavio.graciano@ifsuldeminas.edu.br.

tratamento analítico do problema.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Consideremos o mapeamento

$$x_{n+1} = Rx(1 - x_n^{\gamma}) = \text{F (R,}x_n),$$

no ponto fixo temos $x_{n+1} = x_n = x$, assim temos

$$x = Rx(1 - x^{\gamma})$$

$$x - Rx(1 - x^{\gamma}) = 0$$

$$x[1 - R(1 - x^{\gamma})] = 0$$

a qual apresenta as seguintes soluções: $x = 0$ e $x^{\gamma} = 1 - \frac{1}{R}$, que são os pontos fixos para o mapeamento estudado (HERMES, 2015).

Analisando a estabilidade para estes pontos fixos temos:

Ponto fixo 1: $x = 0$

Uma vez que $F(R, x) = Rx(1 - x^{\gamma})$ temos que $\frac{\partial F}{\partial x} = R - R(1 + \gamma)x^{\gamma}$, então $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=0}$=R, a estabilidade ocorre quando $\left|\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=0}\right| < 1$, assim:

$$|R| < 1 \Rightarrow -1 < R < 1, como\ R \geq 0\ temos\ que\ 0 \leq R \leq 1$$

temos assim que o ponto fixo $x = 0$ é assintoticamente estável para $R \in [0,1)$.

Ponto fixo 2: $x^{\gamma} = 1 - \frac{1}{R}$

De forma análoga ao que foi feito no ponto fixo 1 temos que $\frac{\partial F}{\partial x} = R - R(1 + \gamma)x^{\gamma}$, então $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=(1-\frac{1}{R})^{\frac{1}{\gamma}}} = R - R(1 + \gamma)[(1 - \frac{1}{R})^{\frac{1}{\gamma}}]^{\gamma} \Rightarrow R - R(1 + \gamma)(1 - \frac{1}{R})$.

Para este caso iremos observar para dois casos particulares $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$.

Com $\gamma = 1$ temos:

$$R - R(1 + 1)(1 - \frac{1}{R})$$

$$R - 2R(1 - \frac{1}{R})$$

$$R - 2R + 2$$

$$-R + 2$$

Logo $|-R + 2| < 1$, então

$$-1 < -R + 2 < 1$$

$$1 > R - 2 > -1$$

$$3 > R > 1$$

$$1 < R < 3$$

Desta forma para o segundo ponto fixo com $\gamma = 1$ é assintoticamente estável para $R \in (1,3)$. Vale a pena ressaltar que para $R = 1$ a bifurcação é chamada transcrítica como pode ser verificado na Figura 1.

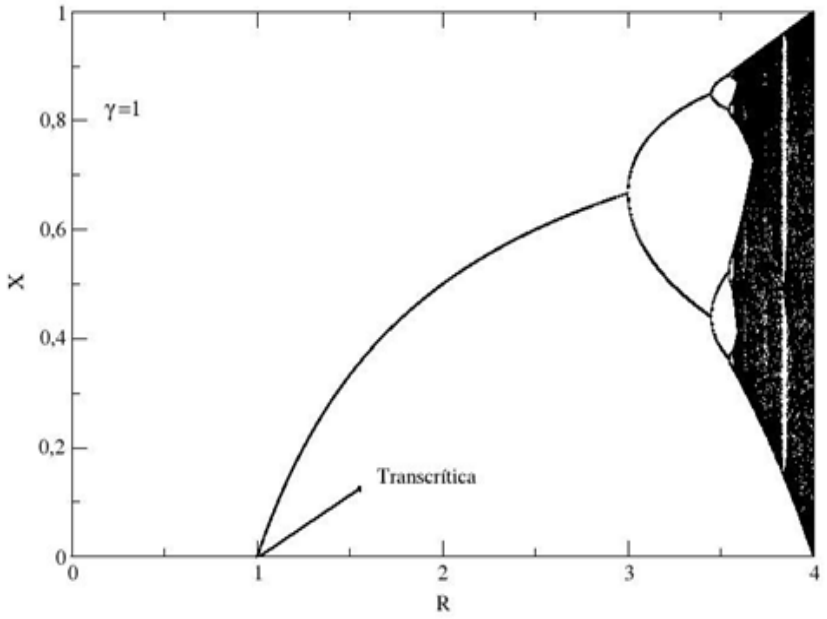

Figura 1: Diagrama de bifurcação para $\gamma = 1$.

Neste caso percebemos que o Mapa Logístico é recuperado.

Com $\gamma = 2$, temos:

$$R - R(1+2)(1 - \frac{1}{R})$$

$$R - 3R(1 - \frac{1}{R})$$

$$R - 3R + 3$$

$$-2R + 3,$$

logo $|-2R + 3| < 1$, então

$$-1 < -2R + 3 < 1$$

$$1 > 2R - 3 > -1$$

$$2 > R > 1$$

$$1 < R < 2,$$

assim para o ponto fixo com $\gamma = 2$ é estável para $R \in (1,2)$. Onde para $R = 1$ ocorre uma bifurcação chamada de bifurcação de forquilha como indicado na Figura 2, nesse caso temos o Mapa Cúbico.

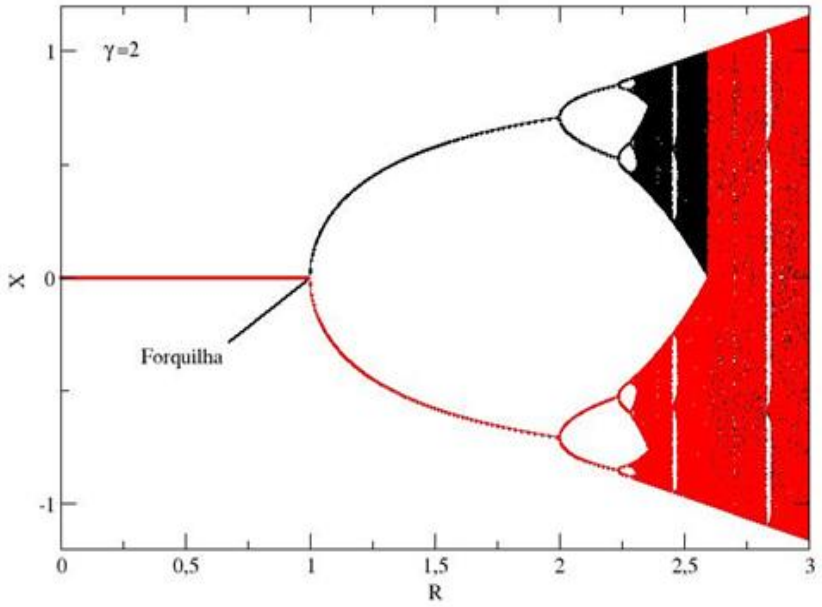

Figura 2: Diagrama de Bifurcação para $\gamma = 2$.

4. CONCLUSÕES

Notamos que o Mapa Logístico-Like é um Mapa Logístico generalizado, e que para $\gamma = 1$ recuperamos o Mapa Logístico usual o qual apresenta dentre outros tipos de bifurcações uma bifurcação transcrítica. Para $\gamma = 2$ temos o Mapa Cúbico e nele está presente uma bifurcação de forquilha.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.

NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.

REFERÊNCIAS

FEIGENBAUM, M. J. **The Universal MetricPropertiesofNonlinearTransformations**. J. Stat. Phys. 21, 669-706, 1979.

HERMES, J. D. V.; etal. In: Simpósio da Pós-Graduação do IFSULDEMINAS, 4, 2015, Poços de Caldas, **ESTUDO DO MAPA LOGÍSTICO-LIKE: Convergência para o estado estacionário.***Resumos*... Poços de Caldas: IFSULDEMINAS, 2015, p.6.

TEIXEIRA R.M., et al. **Convergencetowardsasymptoticstate in 1-D mappings: A scalinginvestigation**. Phys. Lett. A 379 (2015) 1246.