

GRAFOS: Analisando conjecturas relativas ao segundo maior autovalor da matriz Laplaciana sem sinal

Nathália C. do C. MENDONÇA¹; Jorge F. A. LIMA²

RESUMO

Objetiva-se com esta produção averiguar se uma dada lista de conjecturas abrangendo o segundo maior autovalor da matriz Laplaciana sem sinal de um grafo permanece em aberto. Foram listadas 3 conjecturas presentes na literatura do tema em questão. A execução da proposta deste escrito se deu essencialmente por meio de um levantamento bibliográfico, cuja finalidade consistiu na busca de possíveis provas exibidas para as afirmações consideradas. Tal análise possibilitou a confirmação de que já existem demonstrações para as mesmas. O trabalho aqui exposto está englobado em um projeto maior, no qual em momentos pósteros ambiciona-se prosseguir com esta pesquisa e elucidar conjecturas ainda não solucionadas envolvendo o tópico em evidência.

Palavras-chave: Teoria Espectral; Pesquisa; Demonstrações; Proposições.

1. INTRODUÇÃO

A Teoria Espectral de Grafos (TEG) tem se manifestado como um área de pesquisa extremamente promissora, a julgar por fatores como o súbito aumento no número de publicações acerca da mesma nos últimos anos e a vasta gama de aplicações que esta abarca, aspecto o qual é salientado por Abreu (2005).

No que tange a teoria em pauta, esta busca “[...] analisar propriedades estruturais de grafos e determinar as propriedades espectrais de matrizes a eles associadas” (OLIVEIRA, 2012, p. 1).

Um grafo $G(V, E)$ é uma estrutura algébrica, na qual V é um conjunto não vazio cujos elementos são denominados vértices e E é um conjunto de pares não ordenados de V , intitulados arestas.

A figura abaixo ilustra um exemplo:

¹ Bolsista PIVIC, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: nathalliamendonca@gmail.com.

² Orientador, IFTM – Campus Parque Tecnológico. E-mail: jorgealencar@iftm.edu.br.

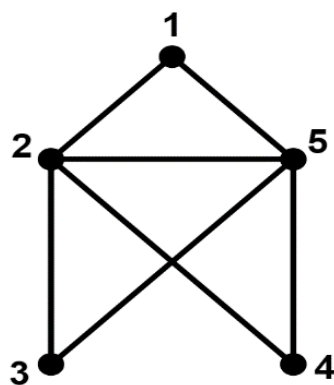


Figura 1: Exemplo de grafo

Os conjuntos de vértices e arestas referentes ao grafo da figura 1 são, respectivamente, $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{(1, 2); (1, 5); (2, 3), (2, 4); (2, 5); (3, 5); (4, 5)\}$.

Dentre as matrizes associadas a grafos mais investigadas destacam-se as matrizes de adjacência, Laplaciana e Laplaciana sem sinal, sendo esta última o objeto que fundamenta este artigo. Para um grafo simples G qualquer, a mesma é denotada por $Q = Q(G) = A + D$, em que A é a matriz de adjacência de G e D , a matriz diagonal dos graus de seus vértices.

No campo da Teoria Espectral de Grafos, a matriz Laplaciana sem sinal tem adquirido notável visibilidade na comunidade dos pesquisadores deste âmbito. Tal fato se deve às potencialidades de seu espectro, uma vez que este, de acordo com indicações de experimentos computacionais, “[...] fornece mais informações sobre a estrutura do grafo que os espectros das matrizes de adjacência e laplaciana” (OLIVEIRA, 2012, p. 1). Tais experimentações tornam o estudo da matriz em pauta relevante e propiciam a geração de inúmeras conjecturas do ponto de vista aplicado e teórico. Estas últimas consistem na razão motivadora do presente trabalho. Conjecturas são afirmações de extrema importância dentro da Matemática, visto que o estudo destas abre um leque de possibilidades de pesquisa e desenvolvimento.

Neste contexto, figura como central finalidade deste escrito a análise de algumas conjecturas a fim de verificar se as mesmas continuam sem solução, ampliando oportunidades para novas investigações e resultados.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Para a elaboração deste artigo, realizou-se uma busca por conjecturas relativas ao segundo maior autovalor da matriz Laplaciana sem sinal de um grafo. Deste modo, foi consultada a produção de Cvetkovic, Rowlinson e Simic (2007), na qual é apresentada uma lista de 30 conjecturas geradas por intermédio de experimentos com o sistema AutoGraphiX, sendo 12 delas concernentes ao tema aqui enfatizado. Dentre estas, 3 foram selecionadas para que pudesse ser efetuada a proposta inicialmente descrita.

As conjecturas consideradas neste trabalho são elencadas a seguir:

1. Se G é um grafo conexo de ordem $n \geq 4$, então

$$q_1 - q_2 \leq n$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G é um grafo completo K_n .

2. Se T é uma árvore de ordem $n \geq 4$, então

$$q_1 - q_2 \leq n - 1$$

A igualdade ocorre se, e somente se, T é uma estrela S_n .

3. Se G é um grafo conexo de ordem $n \geq 4$, então

$$\Delta - q_2 \leq n - 2$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G é uma estrela S_n .

O intuito primacial deste escrito é o de certificar se tais afirmações permanecem em aberto.

Diante das conjecturas já elucidadas, serão indicadas as obras nas quais estão expostas suas demonstrações.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em virtude da grande quantidade de problemas que constantemente eclodem no cenário da Teoria Espectral de Grafos, torna-se imprescindível saber quais destes já tiveram suas respostas esclarecidas e quais mantêm-se enquanto conjecturas. Por meio destas últimas, pode ser viabilizada a expansão de novos conhecimentos. Nesta perspectiva, tal fato se apresenta como uma das contribuições deste trabalho, a partir do qual estudos futuros são visados.

Relativamente às conjecturas abordadas, as duas primeiras referem-se ao maior e ao segundo maior autovalor de $Q(G)$, denotados por q_1 e q_2 , respectivamente. Realizou-se buscas por possíveis provas que tenham sido exibidas para as mesmas. No decorrer destas, constatou-se que as afirmações já foram solucionadas, fato este corroborado por intermédio do trabalho de Freitas (2012). A autora aponta que as demonstrações para as conjecturas indicadas estão expostas na obra de Das (2010). Este último empregou resultados prévios existentes na literatura para concluir as provas. Além destas, outras 3 das 12 conjecturas que aludem o segundo maior autovalor da matriz Laplaciana sem sinal elencadas por Cvetkovic, Rowlinson e Simic (2007) são demonstradas pelo autor nesta mesma produção.

Quanto à terceira conjectura, esta reporta-se ao grau máximo de G e ao segundo maior autovalor de $Q(G)$, dados por Δ e q_2 , de modo respectivo. Com as pesquisas, confirmou-se que a afirmação foi verificada pelos próprios autores que a propuseram.

4. CONCLUSÕES

Objetivou-se, por meio deste trabalho, dar início a um projeto mais amplo acerca dos estudos sobre a matriz Laplaciana sem sinal, os quais são consideravelmente recentes no contexto da Teoria Espectral de Grafos. A ênfase nas conjecturas se justifica pela relevância das mesmas em nortear a obtenção de novos resultados, o que é de extrema importância para a área enquanto campo científico.

Além das conjecturas abordadas neste artigo, ambiciona-se prosseguir com as pesquisas referentes ao tema aqui evidenciado. Nesta perspectiva, visa-se verificar novas conjecturas e desenvolver possíveis provas para aquelas que ainda não foram demonstradas, utilizando do auxílio de testes computacionais e softwares e aspirando a construção de novos conhecimentos sobre o assunto.

REFERÊNCIAS

ABREU, N. M. M. Teoria Espectral de Grafos: um híbrido entre a álgebra linear e a matemática discreta e combinatória com origens na química quântica. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 1-10, 2005. Disponível em: <<https://tema.sbmec.org.br/tema/article/view/299/238>>. Acesso em: ago. 2018.

CVETKOVIC, D.; ROWLINSON, P.; SIMIC, S. K. **Eigenvalue bounds for the signless Laplacian**. Disponível em: <<http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/publ/101/n095p011.pdf>>. Acesso em: ago. 2018.

DAS, K. C. **On conjectures involving second largest signless Laplacian eigenvalue of graphs**. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379510000066>>. Acesso em: ago. 2018.

OLIVEIRA, J. A. **M-spread e spread laplaciano versus número cromático de um grafo**. 2012. 96 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

FREITAS, A. C. C. **Um survey sobre o índice da matriz Laplaciana sem sinal de um grafo**. 2012. 69 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia) – Programa de Pós-Graduação em Tecnologia, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2012.