

## O MAPA QUADRÁTICO

**Lediane M. MOREIRA<sup>1</sup>; Joelson D. V. HERMES<sup>2</sup>; Carlos E. de P. ABREU<sup>3</sup>**

### RESUMO

O presente trabalho discute as propriedades do Mapa Quadrático, fazendo uma comparação entre os resultados analíticos e numéricos. Obtemos a equação do Mapa Quadrático por meio de uma transformação de variáveis na equação do bem conhecido Mapa Logístico, o qual é uma equação determinística que pode ser utilizada no estudo de dinâmica populacional.

**Palavras - chave:** Sistemas não-lineares; Caos; Mapa Unidimensional

### 1. INTRODUÇÃO

O interesse a respeito dos sistemas dinâmicos, caos, vem crescendo, no entanto ainda há muitas dúvidas a respeito do assunto. A palavra Caos tem diversas conotações na linguagem usual, porém, sua utilização para definir um comportamento dinâmico foi proposta por Tien-Yen Li e James A. Yorke, num artigo de 1975 intitulado *Period Three Implies Chaos* (FERRARI, 2017).

Concebida em meio a grandes controvérsias suscitadas pela Relatividade e pela Mecânica Quântica, no início do século XX, a Teoria do Caos só foi reconhecida enquanto tal nas décadas de 1960 e 1970. Teve uma breve ascensão no plano da divulgação científica nas décadas de 1980 e 1990 (FERRARI, 2017). O objetivo principal dessa pesquisa consiste em analisar as propriedades do Mapa Quadrático, comparando os resultados analíticos com os resultados encontrados numericamente.

### 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A equação do mapa quadrático pode ser obtida por meio da transformação linear através da equação linear  $y = ax + b$  do Mapa Logístico, a qual fora descrito em 1976 pelo biólogo Robert May sendo ela uma maneira de se estudar a dinâmica populacional de insetos (MAY, 1976), representada por:

$$Y_{n+1} = RY_n(1 - Y_n), \quad (1)$$

substituindo a equação linear, temos:

<sup>1</sup>Bolsista PIBIC, IFSULDEMINAS – *Campus* Inconfidentes. E-mail: ledianemoreira@outlook.com.

<sup>2</sup>Orientador, IFSULDEMINAS – *Campus* Inconfidentes. E-mail: joelson.hermes@ifsulde Minas.edu.br.

<sup>3</sup>Colaborador, IFTO – *Campus* Araguatins. E-mail: carlos.abreu@ifto.edu.br.

$$aX_{n+1} + b = R(aX_n + b)(1 - aX_n - b), \quad (2)$$

reordenando convenientemente os termos temos,

$$X_{n+1} = -RaX_n^2 - RX_n(2b - 1) + \frac{b}{a}(R - Rb - 1), \quad (3)$$

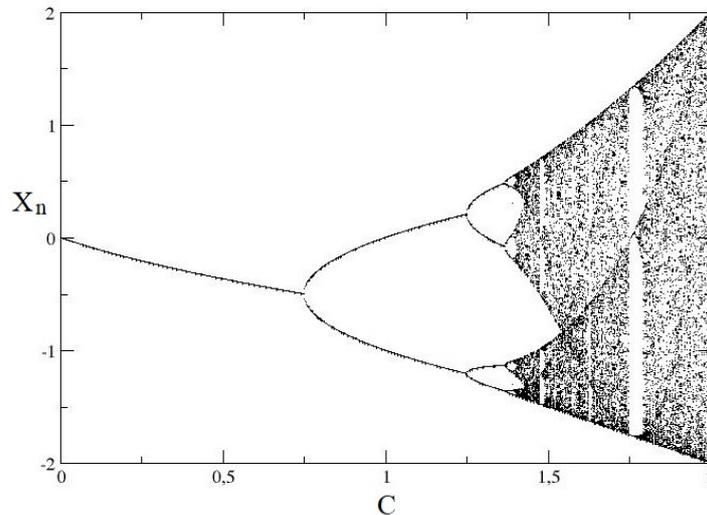
nomeando  $a = -\frac{1}{R}$  e  $b = \frac{1}{2}$  temos:

$$X_{n+1} = X_n^2 - \frac{R^2 - 2R}{4}, \quad (4)$$

tomando  $C = (\frac{R^2 - 2R}{4})$ , obtemos:

$$X_{n+1} = X_n^2 - C, \quad (5)$$

que é a equação do Mapa Quadrático, onde  $C$  é o parâmetro de controle. Consideramos o intervalo de variação para a equação deste de  $[0,2]$ . Na Figura 1, temos o diagrama de bifurcações do Mapa Quadrático através do qual podemos notar que inicialmente o comportamento do mapa é periódico, mas depois uma sequência de bifurcações o comportamento do mapa passa ser caótico a partir de um determinado valor crítico do parâmetro  $C$ .



**Figura 1:** Diagrama de bifurcação para o Mapa Quadrático para  $X_0 = 0,5$ .

### 3. MATERIAL E MÉTODOS

No desenvolvimento do trabalho fizemos um tratamento analítico para o estudo das propriedades do mapa e também uma abordagem numérica com a escrita de um algoritmo em Fortran. Além disso, fizemos também uso do software Xmgrace para obtermos o gráfico, possibilitando assim a observação de seu comportamento de forma mais abrangente.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O tratamento analítico se deu a partir da determinação dos primeiros pontos fixos do mapa assim como a análise de sua estabilidade.

##### **Cálculo dos dois primeiros pontos fixos:**

Tomando:

$$X_{n+1} = X_n = X, \quad (6)$$

e substituindo na equação do mapa (equação 5), temos,

$$X^2 = X - C, \quad (7)$$

a qual possui as seguintes raízes,

$$X_1^* = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \quad \text{e} \quad X_2^* = \frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{2}, \quad (8)$$

que são os primeiros pontos fixos do mapa.

Para verificarmos a estabilidade desses pontos fixos temos que se  $|F'(X^*)| < 1$  então o ponto fixo é dito assintoticamente estável e se  $|F'(X^*)| > 1$  temos que o ponto fixo é assintoticamente instável. Dessa forma o ponto fixo  $X_1^*$  é assintoticamente estável para  $c \in [0, \frac{3}{4}]$ . O ponto fixo  $X_2^*$  está fora do intervalo definido.

##### **Cálculo dos outros dois pontos fixos:**

Isso pode ser feito resolvendo a seguinte equação

$$X_{n+2} = X_{n+1} = X_n = X, \quad (9)$$

uma vez que

$$X_{n+2} = (X_{n+1})^2 - C, \quad (10)$$

chegamos a:

$$X^4 - 2X^2 - X + C^2 - C = 0. \quad (11)$$

Resolvendo a equação 11, determinamos os próximos pontos fixos.

$$X_3^* = \frac{-1 + \sqrt{4c - 3}}{2} \quad \text{e} \quad X_4^* = \frac{-1 - \sqrt{4c - 3}}{2}. \quad (12)$$

Analisando a estabilidade para  $X_3^*$  e  $X_4^*$  analogamente ao que foi feito para os pontos fixos anteriores temos que estes pontos fixos são assintoticamente estáveis para  $C \in (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ . Tal comportamento pode ser verificado através do diagrama de bifurcação

do mapa, ou seja, para  $C = \frac{3}{4}$  é possível notar que ocorre uma bifurcação de duplicação de período com o surgimento dos pontos fixos  $X_3^*$  e  $X_4^*$  e para  $C = \frac{5}{4}$  temos novamente uma bifurcação de duplicação de período a qual dará origem aos pontos fixos  $X_5^*$ ,  $X_6^*$ ,  $X_7^*$  e  $X_8^*$ , tal comportamento se repete até chegar a região caótica esse fenômeno é uma rota para o caos.

## 5. CONCLUSÃO

Mostramos que é possível encontrar a expressão do Mapa quadrático a partir do Mapa Logístico. Percebe-se que os resultados analíticos confirmam bem os resultados encontrados numericamente, além disso determinamos os valores críticos de  $C$  para os quais ocorrem as primeiras bifurcações.

## AGRADECIMENTOS:

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.

NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.

## REFERÊNCIAS:

FERRARI, Paulo Celso; ANGOTTI, José André P.; TRAGTENBERG, Marcelo H. R.. **A Formação de Professores e a História da Teoria do Caos**. Instituto de Física - Ufg, Goiás. 2017.

MAY. R.M. **Simple mathematical models with very complicated dynamics**. Nature, 261 (5560):459.

OLIVEIRA, Amanda Prina de. **Estruturas shrimp e propriedades dinâmicas no modelo dissipativo do acelerador de Fermi**. 2014. 52 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Física, Instituto de Geociências e Ciências Exatas- UNESP, Rio Claro, 2014.