

Estudo do Mapa Hassell: Uma análise de estabilidade

Beatriz de F. P. SILVA¹; Joelson D. V. HERMES²; Carlos E. de P. ABREU³

RESUMO

O presente trabalho busca apresentar o mapeamento, determinando seus pontos fixos e fazer a análise da estabilidade dos mesmos. Os parâmetros de controle foram variados a fim de analisar quais são as alterações provocadas na dinâmica do sistema, tal estudo é feito avaliando o diagrama de bifurcação do mapa.

Palavras-chave: Sistemas não-lineares; Caos; Mapa Udimensional.

1. INTRODUÇÃO

A teoria dos sistemas dinâmicos também conhecida como dinâmica não-linear e teoria do caos, podem ser identificadas já no século XVI, nos trabalhos de Mecânica Celeste escritos por Johannes Kepler. (MARTINS e ZONOTELLO, 2018).

O mapeamento que será estudado apresenta comportamentos que podem ser calculados através de seus pontos fixos e análise da estabilidade, além disso, apontam conjuntos atratores e proporções naturais que caracterizam a distribuição assintótica das orbitas sobre estes atratores.

O principal foco da investigação basea-se em apresentar o diagrama de bifurcação, com seus pontos fixos, analisando sua estabilidade e então discutir o comportamento desse mapa após ser feitas variações nas condições iniciais e também nos parâmetros de controle.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O mapa Hassell é um mapa udimensional não linear discreto definido pela equação:

¹Bolsista PIVIC, IFSULDEMINAS – *Campus Inconfidentes*. E-mail: biahsilva06@gmail.com.

²Orientador, IFSULDEMINAS – *Campus Inconfidentes*. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br.

³Colaborador, IFTO – *Campus Araguatins*. E-mail: carlos.abreu@ifto.edu.br.

$$N_{n+1} = \frac{rN_n}{(1 + aN_n)^\gamma} \quad (1)$$

onde a, r e γ são parâmetros de controle. (BASCOMPETE e SOLÉ, 1994).

Variando os valores de a podemos notar através do diagrama de órbitas um decaimento na variável N , porém a forma com que isso acontece depende desse parâmetro, dessa forma pretendemos por meio de simulações variar o parâmetro e observar tais mudanças através do diagrama de órbitas. (MENDONÇA e OLIVEIRA, 2017).

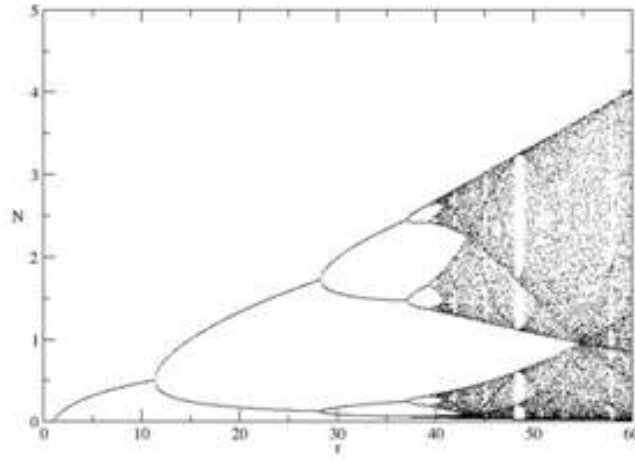


Figura 1: Diagrama de órbitas para o mapa Hassell com $a = 1, \gamma = 6$ e $N_0 = 0,3$.

3. MATERIAL E MÉTODOS

No decorrer do trabalho escrevemos um algoritmo em Fortran por meio do qual fizemos as simulações, de posse dos dados foram usados softwares para plotar o gráfico e através dos parâmetros investigados reunir as conclusões necessárias para a finalização deste trabalho.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A princípio permanecemos com o parâmetro γ fixo e variamos o parâmetro a , os resultados alcançados são apresentados na Figura 2. Percebemos que à medida que aumentamos o valor de a , acontece um decaimento na variável N , porém a dinâmica do sistema se mantém no que diz respeito ao aparecimento de caos e também a ocorrência de bifurcações, uma vez que os valores críticos de r para os quais as bifurcações ocorrem são os mesmos.

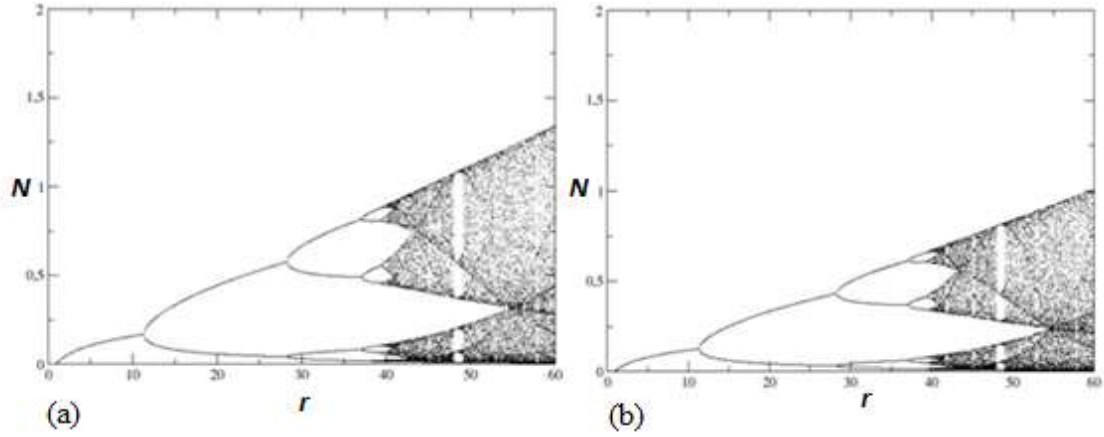


Figura 2: Diagrama de órbitas para o mapa Hassell a) $\alpha=3, \gamma=6$ e $N_0=0,3$ b) $\alpha=4, \gamma=6$ e $N_0=0,3$.

Determinação dos pontos fixos:

Reescrevendo o mapeamento como $F(N) = \frac{rN}{(1+aN)^\gamma}$, para determinarmos os pontos fixos basta fazer $F(N) = N$, o que nos leva a:

$$N[(1 + aN)^\gamma - r] = 0, \quad (2)$$

resolvendo a equação (2) temos os pontos fixos $N_1 = 0$ e $N_2 = \frac{r^{\frac{1}{\gamma}} - 1}{a}$.

A estabilidade linear ocorre quando $\left| \left(\frac{dF}{dN} \right) \Big|_{N_{1,2}} \right| < 1$, dessa forma para N_1 e N_2 , temos:

$$F'(N) = \frac{dF}{dN} = r(1 + aN)^{-\gamma} - \gamma rNa(1 + aN)^{-\gamma-1}, \quad (3)$$

dessa forma aplicados na equação (3):

$$1) \ N_1=0,$$

$$F'(0) = r,$$

fazendo $|r| < 1$ temos $-1 < r < 1$ e como $r \in [0,60]$, este ponto fixo é assintoticamente estável para $0 \leq r < 1$.

$$2) \quad N_2 = \frac{r^{\frac{1}{\gamma}} - 1}{a}$$

$$F'(N_2) = 1 - \gamma + \gamma R^{-\frac{1}{\gamma}},$$

fazendo $\left|1 - \gamma + \gamma R^{-\frac{1}{\gamma}}\right| < 1$ então $-1 < 1 - \gamma + \gamma R^{-\frac{1}{\gamma}} < 1$, reordenando convenientemente os termos temos:

$$1 < R^{\frac{1}{\gamma}} < \frac{\gamma}{\gamma - 2},$$

logo, para o ponto fixo N_2 é assintoticamente estável para nesse intervalo. Quando $\gamma = 6$, como no diagrama apresentado na Figura 1, o ponto fixo será assintoticamente estável para $R \in (1; 11,3)$.

5. CONCLUSÕES

Percebemos que o parâmetro a não tem grande influência na dinâmica do sistema, uma vez que as variações provocam apenas um decaimento no valor da variável N , mas os valores de r para os quais acontecem as bifurcações e também se dá o aparecimento de caos são os mesmos.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.

NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.

REFERÊNCIAS

BASCOMPETE, Jordi; SOLÉ, Ricardo V. Spatially Induced Bifurcations In Sigle-Species Population Dynamics. Journal of Animal Ecology. Barcelona, p. 256-264. 01 abr. 1994.

MARTINS, Flavio Avila Correia; ZANOTELLO, Marcelo. Mecânica celeste e a teoria dos sistemas dinâmicos: uma revisão do problema circular restrito de três corpos. Rev. Bras. Ensino Fís., São Paulo , v. 40, n. 2, e2310, 2018 .

MENDONÇA, Hans Muller Junho de; OLIVEIRA, Juliano Antônio de. Propriedades de Escala e Cascatas de Bifurcações em Mapas Unidimensionais Discretos. Rio Claro: UNESP, 2017. 28 p.