

O PARADOXO DE GALILEU: um legado para Cantor

André R. G. SILVA¹; Renato M. PEREIRA²

RESUMO

A proposta do projeto foi estudar um paradoxo proposto por Galileu Galilei e como ele se relaciona com teorias estudadas séculos depois por matemáticos como Bernard Bolzano e Georg Cantor, e dessa forma, sendo possível vislumbrar o estudo dos conjuntos na história da matemática.

Palavras-chave: Lógica; Fundamentos da Matemática; Teoria dos Conjuntos; Infinito.

1. INTRODUÇÃO

Galileu Galilei (1564-1642), estudioso reconhecido por diversos feitos nas áreas de astronomia, física e matemática, em seu livro *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo* (1632) discute principalmente sobre o movimento heliocêntrico (MARICONDA, 2011) e também sobre um paradoxo que postumamente herdou seu nome. O paradoxo de Galileu consiste na indagação sobre uma função bijetora, a qual pode ser definida como uma função simultaneamente injetora e sobrejetora, isto é, elementos distintos do domínio correspondem a elementos distintos do contradomínio e todo elemento do contradomínio é correspondente de algum elemento do domínio. Especificamente, o paradoxo questiona sobre o conjunto dos quadrados perfeitos. Todos os números inteiros possuem um quadrado perfeito, que por sua vez, também é inteiro. Se nem todos os inteiros são quadrados perfeitos, analisando de forma intuitiva, seria possível afirmar que o conjunto de números quadrados perfeitos é menor que o conjunto de números inteiros. Todavia trata-se de uma falácia da intuição, uma vez que para cada número no conjunto inteiro há um correspondente no conjunto dos quadrados perfeitos, satisfazendo os critérios para ser uma função bijetora, logo, os conjuntos possuem mesma quantidade de elementos, mesmo sendo conjuntos infinitos. Visto que o resultado final vai de encontro a um dos postulados de Euclides — O todo é sempre maior que a parte. (BICUDO, 2009) — Galileu conclui que “maior que”, “menor que” e “igual” são comparações que podem ser utilizadas no campo apenas dos finitos.

¹Orientando, IFSULDEMINAS – Campus Muzambinho. E-mail: 12161003766@muz.ifsuldeminas.edu.br.

²Orientador, IFSULDEMINAS – Campus Muzambinho. E-mail: renato.pereira@muz.ifsuldeminas.edu.br.

Nesse sentido, tais estudos ficaram esquecidos por séculos, até que Georg Cantor retomou as ideias de Galilei e assim abrilhantou a matemática moderna contribuindo para a teoria dos conjuntos.

2. MATERIAL E MÉTODOS

O desenvolvimento do projeto foi baseado na leitura dos livros, discussão com o orientador e escrita dos estudos. No desenvolvimento do projeto, diversos livros foram consultados, como indicado na referência bibliográfica.

.

As etapas da pesquisa se dividiram em:

- a) Estudo da noção de paradoxos lógicos: o objetivo desta etapa foi desenvolver o domínio da noção de paradoxos lógicos.
- b) Revisão filosófica e histórica dos fundamentos da matemática: nesta fase houve um estudo da influência dos paradoxos nas bases científicas da matemática.
- c) Catalogação dos paradoxos lógicos: nesta etapa, houve um levantamento dos paradoxos da história da matemática.
- d) Estudo dos mais famosos paradoxos lógicos: esta etapa houve um estudo do Paradoxo de Russell e o Paraíso de Cantor.
- e) Escrita de um material sobre os assuntos estudados: esta etapa fechou toda a pesquisa com a produção de um texto matemático sobre os assuntos abordados.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante a história da matemática póstuma a Galileu Galilei, alguns matemáticos tentaram desvendar os mistérios dos conjuntos infinitos, como Bernard Bolzano (1781-1848), analisando estudos de Galileu concluíram que na realidade a relação dos conjuntos com uma correspondência bijetora pode ser uma propriedade ou característica dos conjuntos infinitos (ZUMPANO, 2001), isto é, se um conjunto pode estabelecer uma relação bijetiva com o conjunto dos naturais, esse é enumerável, caso contrário será não-enumerável. Desta forma, Bolzano definiu também o conceito de cardinalidade ou potência de um conjunto, que pode ser estabelecido da seguinte forma: a cardinalidade de um determinado conjunto é o número de objetos nele contido.

Utilizando conceitos precedentes de Bolzano, e analisando o paradoxo de Galileu, Cantor chega a outro paradoxo, atualmente nomeado “Paradoxo de Cantor”. Este consiste no embasamento de que a cardinalidade do conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto, é maior do que a cardinalidade do próprio conjunto e dado o exposto, imagina-se um conjunto de absolutamente todas as coisas, que seja o máximo e o maior de todos os conjuntos. Para este conjunto máximo, pode haver

um conjunto de todos os seus subconjuntos, cuja cardinalidade será maior que sua própria cardinalidade, logo, este conjunto não é o conjunto máximo (ÁVILA, 2000).

Diante disso, Cantor formulou a teoria dos transfinitos, o qual ia totalmente de encontro às conclusões de Galileu, pois esta teoria, se embasando no paradoxo citado, dava origem à infinitos maiores que outros. Dessa forma, ele cria um parâmetro comparativo de tamanhos de conjuntos infinitos. Para essa espécie de unidade de medida determinou a letra hebraica (alef) e estabeleceu a primeira medida sendo 0 (alef-zero) que segue um padrão hierárquico conforme o tamanho dos conjuntos (ANDRADE, 2010).

4. CONCLUSÕES

Observando o impacto histórico dos paradoxos é possível inferir que a matemática é alavancada pelo desejo de soluções. Estes desafiam a compreensão de mundo do ser humano, de modo que estudiosos forçosamente criam teorias inovadoras, se embasando em outras feitas séculos antes.

Cantor foi muito além da matemática de sua época, propondo os transfinitos a partir de estudos do paradoxo de Galileu e, inclusive foi desprezado pela maior parte dos matemáticos do período. Entretanto, suas teorias são muito aceitas por matemáticos que compreendem mais o infinito com seu auxílio, como David Hilbert citou: “Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.”.

REFERÊNCIAS

BICUDO, I. **Os Elementos**. São Paulo: Unesp, 2009. 593 p. Tradução de: Euclides.

MARICONDA, P. R. **Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano**. São Paulo: Editora 34, 2011. 888 p. Tradução de: Galileu Galilei.

ZUMPARO, A. **Os limites da matemática clássica**. Ciência Hoje, Rio de Janeiro - RJ, v. 29, p. 77 - 79, 21 maio 2001.

ÁVILA, G. **Cantor e a Teoria dos Conjuntos**. Revista do Professor de Matemática, v. 43, p. 6-14, jan. 2000.

ANDRADE, M. G. C. **Um breve passeio ao infinito real de Cantor**. V Bienal da SBM, UFPB, 18 a 22 de outubro de 2010.