A TRANSFORMADA DE LAPLACE COMO MÉTODO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Andressa M. de FARIA[1]; Maria J. F. GOMES[2]

RESUMO

Grande parte dos problemas físicos são abordados em forma de modelo matemático, dos quais se destacam os modelos envolvendo equações diferenciais, logo o desenvolvimento de técnicas para resolução de problemas que envolvam equações diferenciais é de fundamental importância em diversos estudos científicos. Existem métodos muito eficientes para a resolução de equações diferenciais, porém em determinados problemas de aplicação, que envolvam a ação de forças descontínuas, a aplicação dos métodos usuais torna-se bastante complicada. Neste trabalho, desenvolvemos o estudo do problema de resolver equações diferenciais ordinárias por meio da Transformada de Laplace, a qual permite que uma equação diferencial seja resolvida via equações algébricas.

Palavras-chave: Transformada integral; Equações ordinárias de segunda ordem; Sistemas de equações diferenciais.

1. INTRODUÇÃO

Equações diferenciais ordinárias (EDO) é uma área da matemática profundamente relacionada à modelagem de problemas físicos. Estudos mostram que as bases para essa teoria ocorreram no século XVII, tendo como precursores grandes nomes da matemática, podemos citar Newton, Leibniz, Barrow, Gregory, Torricelli, Fermat e os irmãos Bernoulli e Clairaut. Newton realizou contribuições relevantes, dentre as quais podemos citar os estudos envolvendo funções em termos de séries infinitas, além de pesquisas sobre taxas de variações e também formulou um método sistemático de diferenciação. Nesse contexto surgiram as primeiras teorias fazendo uso da diferenciação. Leibniz atuou nos séculos XVII e XVIII, trabalhando independentemente das descobertas de Newton, sendo responsável pelo avanço nos estudos em Cálculo Diferencial e contribuindo para que essa teoria tomasse forma. Na mesma época foram descobertos grupos de equações diferenciais resolvidas por métodos bem simples, entre esses grupos encontra-se a equação de Bernoulli e a equação diferencial de Clairaut, vide [1], [2] e [3].

Apesar de algumas equações diferenciais serem resolvidas através de métodos analíticos de forma relativamente simples, a maioria delas não podem ser resolvidas

[1]Graduanda em Licenciatura em Matemática, IFSULDEMINAS – *Campus* Pouso Alegre. E-mail: amfc1977@hotmail.com
[2]Orientadora, IFSULDEMINAS – *Campus* Pouso Alegre. E-mail: mariajosiane.gomes@ifsuldeminas.edu.br

facilmente, sendo necessário o estudo de técnicas que possam auxiliar na obtenção de soluções. É nesse contexto que pretendemos abordar a Transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais. A Transformada de Laplace também é utilizada em engenharia, principalmente nos cálculos que envolvem sistemas mecânicos e sistemas elétricos e em muitos ramos da matemática como em Análise Funcional, Cálculo Operacional e Teorias Numéricas.

A Transformada de Laplace recebeu esse nome em homenagem a Pierre-Simon de Laplace e consagrou-se na área do Cálculo devido à praticidade oferecida na resolução de equações diferenciais, visto que transforma a equação diferencial ordinária em uma equação algébrica.

Esse trabalho se dedica ao estudo da Transformada de Laplace, concentrando-se no estudo das demonstrações dos principais resultados envolvendo propriedades e condições de existência da Transformada de Laplace e na aplicação da mesma como método para resolução de EDOs. Desenvolvemos o estudo da Transformada de Laplace na resolução de problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes,

$$u(t) = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{k-1} y^{k-1} \ , \ \kappa \in N \ , \qquad (1)$$

com condições iniciais $y(0) = y_0, y'(0) = y_0', \ldots, y^{k-1}(0) = y_0^{k-1}$.

Tratamos também da resolução de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes através da Transformada de Laplace e abordamos problemas clássicos que envolvem a Transformada de Laplace e as funções degrau, periódicas, convolução e impulso. Se o tempo permitir, faremos um breve estudo da Transformada de Laplace como método para resolução de equações diferenciais parciais.

2. MATERIAL E MÉTODOS

O trabalho tem sido desenvolvido através de estudos teóricos, com a utilização dos livros mencionado nas referências; reuniões semanais para discussões sobre o tema e apresentações de seminários realizadas pela estudante.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Transformada de Laplace é uma transformada integral que transforma uma função com variável t (tempo) em uma função com variável s (frequência). Nesse trabalho fazemos uso da Transformada de Laplace como um método para a resolução de equações diferenciais.

Considere uma função $f : [0, \infty) \to R$. Dizemos que a Transformada de Laplace da função $f(t)$ é definida e representada por:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{2}$$

Note que $e^{-st} f(t)$ é o núcleo da Transformada de Laplace e que essa está definida sempre que a integral existir. Destacamos também que consideramos os casos em que os valores de s são reais. Como as soluções das equações diferenciais lineares com coeficientes constantes estão baseadas na função exponencial, é natural que a Transformada de Laplace seja aplicada com facilidade. O método da Transformada de Laplace baseia-se no seguinte:

1. Usar a Transformada de Laplace em (2) para converter um problema de valor inicial, na forma dada em (1), em uma função $f(t)$ para um problema algébrico mais simples na função $\mathrm{F(s)}$.
2. Resolver o problema algébrico para encontrar $\mathrm{F(s)}$.
3. Recuperar a função desejada $f(t)$ de sua Transformada, essa etapa é chamada de cálculo da Transformada Inversa.

Discorremos sobre a Transformada de Laplace na resolução de problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e a aplicação da Transformada de Laplace na resolução de equações na forma de (1) se baseia no fato de que a transformada de y' relaciona-se de forma simples com a transformada de y. O teorema a seguir exprime essa relação,

Teorema 1. Suponha que $f(t)$ é contínua e que $f'(t)$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \le t \le A$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \le \mathrm{K}e^{at}$ para $t \ge M$. Então $L\{f(t)\}$ existe para $s > a$ e, além disso,

$$L\{f'(t)\} = \mathrm{s}\, L\{f(t)\} - f(0).$$

É imediato que aplicações sucessivas do Teorema 1 resulta numa expressão para a k-ésima derivada y^k.

Corolário 1. Suponha que as funções $f, f', \ldots f^{n-1}$ são contínuas e que f^n é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \le t \le A$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \le \mathrm{K}e^{at}, |f'(t)| \le \mathrm{K}e^{at}, \ldots, |f^n(t)| \le \mathrm{K}e^{at}$, para $t \ge M$. Então, $L\{f^n(t)\}$ existe para $s > a$ e é dado por

$$L\{f^n(t)\} = s^n L(f(t)) - s^{n-1} f(0) - \ldots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0).$$

Esse resultado fornece a base para a aplicação da Laplace em equações diferenciais com coeficientes constantes de qualquer ordem. Após o cálculo da transformada, nos deparamos com o problema da determinação da função $y = \varphi(t)$ correspondente a transformada $Y(s)$, conhecida como transformada inversa de $Y(s)$, usam-se também a notação $L^{-1}\{f(t)\}$, a qual é dada por uma fórmula que será trabalhada no projeto se o tempo permitir. Em um segundo momento, realizaremos o estudo da resolução de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes através da Transformada de Laplace e o estudo de problemas clássicos que envolvem a Transformada de Laplace e as funções degrau, periódicas, convolução e impulso. Se o tempo permitir, faremos uma breve abordagem sobre a Transformada de Laplace como método para resolução de equações diferenciais parciais.

4. CONCLUSÕES

Em linhas gerais, o estudo da aplicação da Transformada de Laplace na resolução de EDOs aborda diversos temas importantes da área de equações diferenciais, os quais, usualmente, não são abordados em nível de graduação. O trabalho tem fortalecido a base teórica da graduanda, oferecendo condições de contato com uma área ainda não estudada e firmando a importância dos conteúdos desenvolvidos no decorrer do curso de graduação, além de abordar importantes problemas de aplicação, o que acarreta um despertar para a importância da matemática no desenvolvimento da sociedade.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2012.

STEWART, J. **Cálculo**: volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2014.