RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR SÉRIES

Alice J. da SILVA¹; Maria J. F. GOMES²

RESUMO

A área de Equações Diferenciais Ordinárias apresenta muitos problemas em aberto, sendo uma grande parte proveniente de modelagem de problemas físicos, que por sua vez, dificilmente apresentam soluções de fácil análise, evidenciando a necessidade de estudos de variadas técnicas de resolução. Este trabalho aborda os estudos de soluções de equações diferenciais lineares pelo método de séries. Esse método baseia-se basicamente na suposição de que a solução pode ser escrita como uma expansão em série de potências, em seguida determinam-se os coeficientes de modo a satisfazer a equação diferencial. Ele é conveniente, pois soluciona um número maior de equações diferenciais ordinárias que os métodos clássicos, além de lançar base para estudos mais elaborados como as séries de Fourier.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; Séries de potências; Pontos ordinários; Pontos singulares.

1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática surgiu da necessidade de previsão de resultados de experimentos reais, mesmo sem a realização do mesmo, culminado em estudos de ferramentas que associassem teoria matemática e modelos reais, na busca de modelos que representassem, de forma muito aproximada, os modelos reais. A busca pela resolução desse problema propiciou a motivação para o surgimento de diversas áreas na matemática, além de aplicações em contextos variados.

As origens dos estudos envolvendo a aplicação do método de soluções em série deram-se por volta de 1750, quando Euler apresentou um estudo envolvendo séries de potências na resolução de equações diferenciais (BOYER, 2012). O uso de séries na resolução de equações diferenciais ordinárias e parciais é de grande relevância, uma vez que a maior parte dos problemas não apresenta uma solução analítica. O objetivo desse trabalho é a análise do método de soluções em série para equações diferenciais ordinárias lineares, abordando problemas que usualmente não são tratados nas referências consultadas, como é o caso das equações envolvendo funções genéricas não polinomiais.

¹Graduanda em Licenciatura em Matemática, IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre. E-mail: alice.jennefer@hotmail.com.

²Orientadora, IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre. E-mail: mariajosiane.gomes@ifsuldeminas.edu.br.

Os estudos mostraram que o método é conveniente e eficiente, pois as séries de potências se comportam de maneira muito semelhante a funções dentro de um intervalo de convergência, bem como soluciona um número maior de equações diferenciais ordinárias.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Consideramos neste trabalho o problema de encontrar soluções de uma equação da forma,

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (\text{I})$$

Onde P, Q e R são funções analíticas. Dizemos que um ponto x_0 é chamado de ponto ordinário se $P(x_0) \neq 0$ e de ponto singular se $P(x_0) = 0$.

A equação (I) regularmente modela problemas de física matemática, podemos citar as clássicas equação de Bessel e equação de Legendre (BOYCE, 2006; BRAUN, 1979; HIRSCH, SMALLE, 1974; ZILL, 2011).

Em síntese, o método propõe a busca por soluções em série da equação (I) na vizinhança de pontos ordinários e pontos singulares regulares. O processo do método consiste em supor que a equação (I) admite uma solução y e que essa admite uma expansão em série de potências,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (\text{II})$$

convergente para $|x - x_0| < R$, para algum $R > 0$. Em seguida, determinamos os coeficientes a_n , substituindo a série em (II) e suas derivadas em (I). Destacamos que as operações envolvidas nos procedimentos são justificáveis desde que permaneçamos no intervalo de convergência. Essa técnica elimina o problema numa vizinhança de um ponto ordinário, no entanto não é aplicável para pontos singulares.

Como uma equação diferencial tem, em geral, poucos pontos singulares, poderíamos interrogar se a opção de ignorá-los seria apropriada, porém em uma vizinhança de um ponto singular a solução torna-se, frequentemente, muito grande em módulo ou ocorrem alterações rápidas em seu módulo, logo o comportamento de sistemas físicos modelados por equações diferenciais pode ser mais interessante numa vizinhança de um ponto singular.

O método descrito acima não é funcional quando x_0 é um ponto singular, uma vez que frequentemente as soluções da equação (I) não são analíticas em x_0 e, portanto, não podem ser representadas por uma série de Taylor. Assim é necessário fazer uso de uma expansão em série mais geral. Nesse caso, consideramos o problema de resolver a equação (I) em uma vizinhança do ponto singular $x_0 = 0$. Note que, se $x_0 \neq 0$, basta transformar a equação em uma equação cujo ponto singular está na origem, tomando $x - x_0 = t$. Como $x = 0$ é um ponto singular de (I), então as funções

$$\frac{xQ(x)}{P(x)} = xp(x) \quad \text{e} \quad \frac{x^2R(x)}{P(x)} = x^2q(x)$$

tem limites finitos quando x tende a zero e são analíticas em $x = 0$, logo tem série de potências convergentes da forma,

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

em algum intervalo $|x| < R$ em torno da origem. Para que as funções $xp(x)$ e $x^2q(x)$ apareçam na equação (I), a dividimos por $P(x)$ e em seguida multiplicamos por x^2 , obtendo

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0.$$

Destacamos que as referências abordam o problema mencionado acima considerando as P, Q e R como funções polinomiais, tornando-o relativamente simples. Ressaltamos que os estudos apontam a possibilidade de resolução de problemas envolvendo funções analíticas genéricas, o que poderia dificultar muito os cálculos, entretanto um dos objetivos do trabalho é também a análise de equações nesse contexto.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Para atender os objetivos do trabalho, têm sido desenvolvidos estudos teóricos através das referências mencionadas; reuniões semanais entre aluna e orientadora para discussão do tema; e eventualmente a apresentação de seminários com tópicos que necessitam de um estudo mais aprofundado.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Considerando o problema de resolver, por meio do método de solução em série, equações diferenciais lineares de segunda ordem,

$$P(x) y'' + Q(x) y' + R(x) y = 0$$

percebemos que as principais referências não tratam dos coeficientes P, Q e R como funções analíticas genéricas, particularizando o problema, principalmente, para o caso em que P, Q e R são polinômios. A justificativa desse tratamento é a simplificação dos cálculos algébricos em uma primeira abordagem.

Através de estudos teóricos da construção do método e do desenvolvimento de problemas, verificou-se que o método é eficiente para o caso em que P, Q e R são polinômios e que se mostra aplicável também para o caso geral. Em seguida serão realizadas demonstrações, estudos de exemplos usualmente não abordados e um estudo de solução em série para equações diferenciais parciais, o Método de Fourier.

5. CONCLUSÕES

O estudo do método de soluções em série lança bases para o estudo de um dos temas mais importantes da área de equações diferenciais, as séries de Fourier, os quais não são regularmente estudados em cursos de graduação. O trabalho tem fortalecido a base teórica da graduanda, oferecendo condições de contato com uma área nova.

A partir dos estudos concluídos até o momento verificou-se que o método é eficiente em torno de pontos ordinários e singulares regulares. As etapas seguintes estão voltadas a justificar a validade do método por meio de argumentos teóricos e o estudo do método para equações mais genéricas.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 2006.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2012.
- BRAUN, M. **Equações Diferenciais e suas aplicações**. Editora Campus, 1979.
- HIRSCH M. W.; SMALLE S. **Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra**. Elsevier, 1974. ISBN:978-0-12-349550-1.
- ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. Cengage Learning, 2011.
- HIRSCH, SMALLE, 1974.