JOGO DO NIM: matemática e teoria

Haislan Wellington Gouveia dos SANTOS[1]; Renato Machado PEREIRA[2]

RESUMO

A proposta do projeto foi pesquisar a matemática envolvida na teoria dos jogos, em particular, no jogo do Nim. Para tanto, foi desenvolvido um estudo geral da teoria dos jogos, isto é, suas definições, aplicações e história. Em seguida, foi estudada a matemática do jogo do Nim, objetivando determinar um cálculo matemático que garantisse a estratégia máxima desse jogo. E, por fim, foi redigido um artigo científico com os resultados da pesquisa.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos; Jogo do Nim; Estratégia máxima.

1. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos é uma área da matemática bastante recente que busca estudar situações em que há duas ou mais "forças atuantes" ou agentes, que possuem poder de decisão e que interagem entre si, e procura prever a escolha de um desses agentes, independente da escolha dos outros (SARTINI et al., 2004).

Desse modo, a teoria dos jogos pode ser estudada apenas como uma teoria da matemática pura, ou com o objetivo de prever eleições, votações, leilões, balanças de poder, negociações, entre outros (SARTINI et al., 2004).

Especificamente, o jogo conhecido como "jogo do Nim" foi um dos primeiros objetos de estudo da teoria combinatória dos jogos, que é a parte que se concentra nos aspectos combinatórios de jogos de mesa e que não permite "elementos imprevisíveis" como o lançamento de um dado ou o baralhamento de cartas (SARTINI et al., 2004). Esse jogo consiste de dois jogadores que removem uma quantidade de palitos de uma ou mais fileiras, a depender das regras definidas, e o ganhador é aquele que remover o último palito da última fileira[3]. Nele é possível desenvolver estratégias vencedoras ou estratégias máximas, que indicam quando um dos jogadores sempre ganha se seguir determinado raciocínio, com uma teoria matemática extremamente simples e completa (BOUTON, 1902).

Os jogos como o do Nim apresentam conceitos básicos, são de fácil compreensão e

---

[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Muzambinho. Muzambinho/MG, email: haislangouveia@gmail.com;

[2] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Muzambinho. Muzambinho/MG, email: renato.pereira@muz.ifsuldeminas.edu.br;

[3] Há também uma versão em que perde quem remove o último palito (versão essa que não será abordada neste texto).

propiciam a determinação de estratégias máximas (RODRIGUES & SILVA, 2004). Desse modo, o presente texto discursará sobre um cálculo matemático que garanta a estratégia máxima desse jogo.

2. MATERIAL E MÉTODOS

O desenvolvimento do projeto foi baseado na leitura dos livros, discussão com o orientador e escrita dos estudos. No desenvolvimento do projeto, diversos livros foram consultados, como indicado na referência bibliográfica.

As etapas da pesquisa foram divididas em:

a) Estudo da teoria dos jogos: o objetivo desta etapa foi desenvolver o domínio da noção matemática de jogo, conhecida como teoria dos jogos.

b) Revisão filosófica e histórica da teoria dos jogos: nesta fase houve um estudo da história da teoria dos jogos e suas influência na matemática.

c) Estudo do jogo do Nim: nesta etapa, houve um levantamento de material e estudo aprofundado do jogo do Nim, suas relações matemática e suas aplicações.

d) Estratégia máxima: o objetivo desta etapa foi determinar um cálculo matemático que garantisse a estratégia máxima do jogo do Nim.

e) Escrita de um material sobre os assuntos estudados: esta etapa fechou toda a pesquisa com a produção de um texto matemático sobre os assuntos abordados.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A versão mais simples do jogo do Nim, em que há apenas uma fileira de palitos, possui uma estratégia que consiste em sempre tentar controlar palitos estratégicos ou interessantes na fileira, e estes são os palitos que o jogador com a estratégia máxima precisa remover ou controlar para ganhar. Suponha que haja uma fileira onde há n palitos e a regra permita remover no máximo m palitos a cada jogada. Os palitos interessantes possuirão um intervalo de m palitos entre si, pois a próxima jogada não conseguirá remover o próximo palito interessante, chegando a no máximo o palito anterior. Note que o último palito estratégico é também o último palito da partida. Basicamente, é possível dividir as fileiras de palitos em blocos. Começando do final, junta-se o último palito estratégico e mais m palitos não interessantes. O próximo palito será estratégico e se pensa em mais m palitos. A posição do primeiro palito estratégico será determinado, então, pelo resto da divisão de n por $m+1$. Se esta for zero, porém, o primeiro palito estará na posição $m+1$, pois não há palito zero.

Para determinar qual jogador irá possuir a vantagem, é necessário analisar a quantidade de palitos anteriores ao primeiro palito estratégico. Caso o primeiro palito estratégico esteja na posição $m+1$, a vantagem será do segundo jogador, porque este, independente das jogada do primeiro, vai sempre conseguir controlar os palitos estratégicos. Neste caso, o quociente de n por $m+1$ será inteiro, se, e somente se, n é múltiplo de $m+1$, e a vantagem inicial é do segundo jogador. Na prática, quando isso ocorrer, o primeiro jogador, removendo um ou o máximo de palitos, sempre vai permitir que o segundo remova o primeiro palito estratégico, algo que o primeiro só vai conseguir fazer na hipótese de um erro do segundo. E o controle do primeiro palito estratégico sempre vai permitir o controle do segundo, e assim sucessivamente.

Caso contrário, o resto da divisão de n por $m+1$ resultar em algo diferente de zero, o primeiro jogador conseguirá remover o primeiro palito estratégico na primeira jogada, pois este, ao contrário do caso anterior, estará na posição m ou em alguma posição menor, onde as regras permitem a remoção em uma única jogada e, por conseguinte, o primeiro controlará todos os outros palitos estratégicos, incluindo o último, ganhando assim o jogo.

Por exemplo, seja $n = 12$ e $m = 3$, conforme a figura 1.

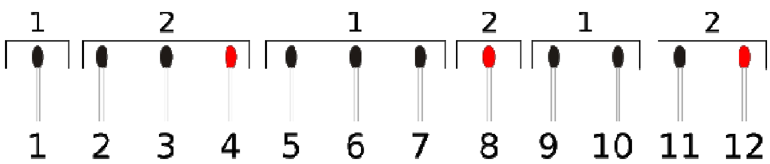

Figura 1: Jogo do Nim com $n = 12$ e $m = 3$.

Neste caso, n é múltiplo de $m+1$ e o primeiro jogador não irá conseguir remover o primeiro palito estratégico, ou seja, o palito de número 4 (na posição $m+1$). Mas, o segundo jogador conseguirá efetuar e deverá o fazer, se quiser ganhar a partida. Simulando, então, suponha que o primeiro jogador remova um palito, o segundo deverá remover 3 para conquistar o palito estratégico. O primeiro, novamente, não conseguirá remover o palito interessante, o de número 8, então retira 3. O segundo, então, remove 1 palito. O primeiro, vendo que já perdeu a partida, remove 2. O segundo, então, remove os dois palitos restantes e ganha a partida. Como é possível ver na figura 1, o jogador 2 sempre capturou os palitos estratégicos, em vermelho, e, assim, ganhou a partida.

Outro exemplo, supondo que $n = 12$ e $m = 4$, conforme a figura 2.

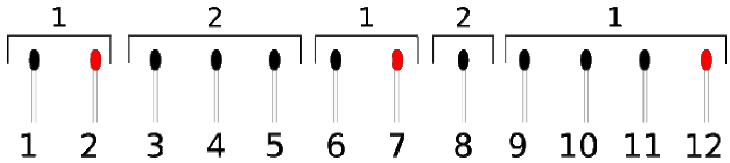

Figura 2: Jogo do Nim com $n = 12$ e $m = 4$.

Neste exemplo, n não é múltiplo de $m + 1$, e o resto dessa divisão resulta em 2, logo o primeiro palito estratégico é o de número 2. O primeiro jogador precisa necessariamente remover o primeiro palito estratégico se quiser ganhar a partida. Então, o primeiro jogador remove 2 palitos, e o segundo retira 3 palitos. O primeiro, novamente, deverá conquistar o palito estratégico, de número 7, então retira 2. O segundo, então, remove 1 palito. Assim, obviamente, o primeiro, removerá os 4 palitos restantes e ganhará o jogo.

4. CONCLUSÕES

Apesar de a teoria parecer complicada, na prática, aplicar a estratégia máxima é bastante simples. Basta pensar que, sendo o objetivo retirar o último palito, dever-se-á sempre deixar palitos não interessantes para o adversário, de modo que este não consiga capturar um palito interessante, e sempre, na sequência de palitos removidos na jogada, o último deve ser estratégico. Dessa forma, dominando palitos estratégicos, a vitória no jogo é garantida. Embora, em diferentes combinações, a vantagem alterne entre o primeiro e o segundo agente de decisão, qualquer erro na estratégia do oponente, na hipótese de a estratégia máxima estar a favor do adversário, isso pode ser explorado de modo a converter a vantagem. Além disso, a matemática envolvida no jogo do Nim pode trazer diversão e conhecimento para ambos os jogadores.

REFERÊNCIAS

BOUTON, C. L. Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory. **The Annals of Mathematics**, 2 ed, v. 3, p. 35-39, 1902.

RODRIGUES, H. O.; SILVA, J. R. O Jogo do Nim e os Conceitos de MDC e MMC. In: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, VIII, 2004. **Anais do VIII ENEM**. Recife: UFPE, 2004. v.1. p.01-14.

SARTINI, B. A. et al. **Uma Introdução a Teoria dos Jogos**. Universidade Federal da Bahia, p.61. 2004. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf>. Acesso em: 05 Mai. 2017.