



INVESTIGAÇÃO DE ESCALA NO MAPA LOGÍSTICO: A Bifurcação Tangente.

Joelson D. V. HERMES¹; Flávio H. GRACIANO²; Edson D. LEONEL³

RESUMO

O presente trabalho busca apresentar uma descrição fenomenológica apoiada por simulações numéricas e confirmada analiticamente, para o estudo do decaimento para o ponto fixo em uma bifurcação tangente presente no mapa logístico. O decaimento para o ponto fixo é caracterizado por uma função homogênea, através da qual foi possível determinar os três expoentes críticos assim como a lei de escala que os relacionam.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos; Caos; Expoentes críticos.

1. INTRODUÇÃO

No estudo de sistemas dinâmicos muitas vezes fazemos o uso de mapeamentos para caracterizar a evolução do sistema, onde o tempo é uma variável discreta, ou seja, só assume valores inteiros. Um bom exemplo de mapeamento unidimensional é o bem conhecido mapa logístico, o qual foi descrito em 1976 pelo biólogo Robert May com uma aplicação direta em Biologia. Além disso, previsões derivadas do mapa logístico foram verificadas em experimentos em fluidos com fraca turbulência, oscilações de reações químicas, circuitos elétricos não lineares e uma variedade de outros sistemas (SAHA, 1995).

O mapeamento em questão tem uma série de comportamentos dinâmicos relevantes, dentre os quais podemos destacar regularidade, diversos tipos de bifurcações, assim como rotas para o caos. Nosso principal objetivo neste trabalho é a aplicação de um formalismo de escala para explorar a evolução em direção ao equilíbrio em uma bifurcação tangente, uma vez que no ponto de bifurcação a órbita segue o caminho descrito por uma função homogênea com expoentes críticos bem definidos (LEONEL, 2015).

Para obtermos os expoentes usamos dois procedimentos distintos, o primeiro fenomenológico envolvendo hipóteses de escala, com o qual determinamos uma lei de escala entre os três expoentes críticos. O segundo transforma uma equação de diferenças em uma equação diferencial, a qual é resolvida com condições iniciais convenientes. Os resultados analíticos confirmam bem os dados encontrados numericamente.

1 IFSULDEMINAS – joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br

2 IFSULDEMINAS – flavio.graciano@ifsuldeminas.edu.br

3 UNESP – edleonel@rc.unesp.br



2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O mapa logístico é um sistema unidimensional unimodal descrito pela equação

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n) = F(x_n), \quad (1)$$

com $R \in [0,4]$, onde R é o parâmetro de controle e x é a variável dinâmica (FIEDLER-FERRARA, 1994). Porém a convergência para o ponto fixo é descrita pela variável y , a qual representa a distância para o ponto fixo, essa convergência deve depender de número m de iterações, da condição inicial y_0 e do parâmetro $\mu = R_c - R$.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Os dados foram obtidos através de simulações numéricas, em seguida utilizamos um software gráfico para plotar os resultados possibilitando assim interpretarmos os resultados e analisar o mecanismo do sistema em questão. Feito isso usamos o formalismo de escala para determinarmos os expoentes característicos relacionados ao decaimento.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Estamos interessados no caso em $\mu = 0$, ou seja, quando estamos na bifurcação. A Figura 1 mostra a convergência para diferentes condições iniciais, através dela é possível notar que dependendo da condição inicial y_0 a órbita fica confinada a um platô e após atingir um número finito de iterações m_x ela sofre uma transição de um regime constante para um decaimento caracterizado por uma lei de potência marcada por um expoente crítico β .

Baseado no comportamento observado na Figura 1 podemos supor as seguintes hipóteses de escala:

1. Para m suficientemente pequeno, ou seja, $m \ll m_x$, o comportamento de y versus m é dado por

$$y(m) \propto y_0^\alpha \quad (2)$$

e como $y \propto y_0$, concluímos que o expoente crítico $\alpha = 1$.

2. Para m suficientemente grande, isto é, $m \gg m_x$, a variável dinâmica é descrita como

$$y(m) \propto m^\beta \quad (3)$$

onde β é o expoente de decaimento.

3. Finalmente o número de iterações m_x é dado por



$$m_x \propto y_0^z \quad (4)$$

onde z é um expoente de transição.

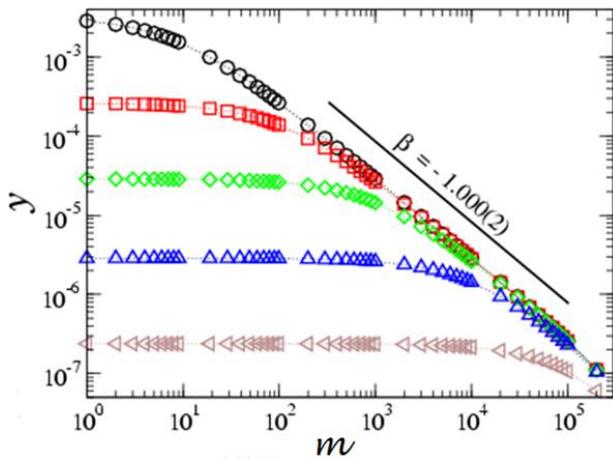


Figura 1: Convergência para o ponto fixo para diferentes condições iniciais.

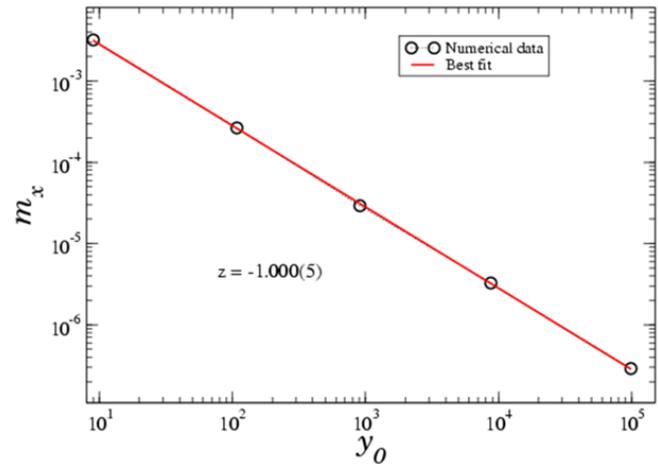


Figura 2: Gráfico do número de crossover m_x em função da condição inicial y_0 .

Os expoentes β e z podem ser determinados considerando os gráficos das Figuras 1 e 2, fornecendo $\beta = -1,000(2)$ e $z = -1,000(5)$.

As três hipóteses de escala aliadas ao comportamento apresentado pelo gráfico da Figura 1 nos permite descrever o comportamento de y como uma função homogênea de variáveis m e y_0 , do tipo

$$y(y_0, m) = ly(l^a y_0, l^b m) \quad (5)$$

onde l é um fator de escala, a e b são expoentes característicos. Como l é um fator de escala podemos associar a equação (5) às três hipóteses de escala, convergindo para a seguinte lei de escala $z = \alpha/\beta$, a qual relaciona os três expoentes crítico e agora conhecendo quaisquer dois expoentes o terceiro fica determinado por essa lei.

Para determinar os expoentes críticos analiticamente consideramos a função $F^{(3)}(x) = G(x)$. Fizemos uma expansão em Taylor da $G(x)$ em torno do ponto fixo até o termo de segunda ordem e reordenando convenientemente os termos chegamos a uma equação de diferenças a qual foi aproximada pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dm} = -ay^2, \quad (6)$$

que após ser resolvida resultou na seguinte expressão



$$y(m) = \frac{y_0}{1 + ay_0m}. \quad (7)$$

Analisando a equação (7) para intervalos específicos de m obtivemos os seguintes resultados: para $m \ll m_x$ temos $ay_0m \ll 1$ o que nos leva a $y(m) \approx y_0$ que comparado a primeira hipótese de escala nos permite concluir que o expoente crítico $\alpha = 1$, para $m \gg m_x$ que equivale a $ay_0m \gg 1$ chegamos a $y(m) \approx m^{-1}$ e com uma comparação rápida com a segunda hipótese de escala concluímos que $\beta = -1$ e finalmente para $m = m_x$ o que significa $ay_0m_x = 1$ obtemos $m_x \approx y_0^{-1}$ e comparando agora com a terceira hipótese de escala nos dá $z = -1$. Assim com este procedimento obtemos os três expoentes analiticamente.

5. CONCLUSÕES

Percebe-se que os dois procedimentos utilizados, o numérico e o analítico, apresentaram os mesmo resultados, o que valida as hipóteses de escala propostas ao longo trabalho. É importante notar também que a lei de escala encontrada é satisfeita em ambos os casos.

AGRADECIMENTOS

IFSULDEMINAS - Campus Inconfidentes

Grupo de Pesquisa em Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear da UNESP - Rio Claro.

NIPE - Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS - campus Inconfidentes.

REFERÊNCIAS

LEONEL, E. D. Fundamentos de Física Estatística. São Paulo: Blucher, 2015.

FIEDLER-FERRARA, N.; DO PRADO, C. P. C. Caos uma introdução. Editora Edgar Blücher LTDA, 1994.

SAHA, P.; STROGATZ, S. H.. The birth of period three. Mathematics Magazine, vol.68, pp. 42-47, 1995.