



# 9ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS

## 6º Simpósio da Pós-Graduação

### PARADOXO DE RUSSELL: um questionamento sobre a excelência da teoria dos conjuntos

André Rodrigues Gomes SILVA<sup>1</sup>; Renato Machado PEREIRA<sup>2</sup>

#### RESUMO

A proposta do projeto foi estudar a origem e as soluções de alguns paradoxos relacionadas à lógica-matemática. Foi feito um levantamento dos paradoxos mais famosos da lógica, visando uma catalogação dos mesmos. Em particular, foram discutidos o paradoxo de Cantor, o paradoxo de Russell e o paradoxo do barbeiro, que tratam de questões relacionadas ao infinito e à Teoria dos Conjuntos proposta por Georg Cantor em aproximadamente 1872.

**Palavras-chave:** Paradoxos; Lógica; Fundamentos da Matemática; Teoria dos Conjuntos; Infinito.

#### 1. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Conjuntos, desenvolvida pelo matemático russo Georg Cantor, provocou um novo modo de enxergar a matemática, agrupando elementos com características ou propriedades em comum. Essa teoria, no entanto, mostra-se intuitiva e abstrata quando se trata de conjuntos infinitos (FAJARDO, 2012) e, por consequência, gerou várias adversidades e paradoxos. Bertrand Russell, assim como Georg Cantor, dedicou-se ao estudo dessa teoria, de modo que estes dois grandes matemáticos perceberam empecilhos na excelência dos conjuntos. Desta forma surgiram os Paradoxos de Cantor e de Russell, além de outras ramificações, como o paradoxo do barbeiro ou o paradoxo das palavras heterológicas.

No estudo sobre a Teoria dos Conjuntos é comum se deparar com os Axiomas, que se tratam de fatos matemáticos que são considerados sentenças verdadeiras sem demonstração (FAJARDO, 2013). Um destes é o Axioma da Potência, definido da seguinte maneira: se  $A$  é um conjunto, então o conjunto potência de  $A$  será um conjunto de todos os subconjuntos de  $A$ . Uma observação imediata é que o número de elementos do conjunto potência de  $A$  sempre é maior que o número de elementos de  $A$ . Portanto, ao considerar a existência de um conjunto universo  $U$ , que é definido por ser um conjunto de todos os conjuntos (um conjunto universal, máximo, infinito e maior que todos os outros), é possível ver que sua existência é impossível, pois quando se aplica ao Axioma da Potência, o conjunto potência de  $U$  tem mais elementos que o conjunto  $U$ , e isso contradiz o fato de que  $U$  é um conjunto máximo (ÁVILA, 2000).

---

<sup>1</sup> Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Muzambinho. Muzambinho/MG, email: andrekid01@gmail.com;

<sup>2</sup> Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais – Campus Muzambinho. Muzambinho/MG, email: renato.pereira@muz.ifsuldeminas.edu.br;



# 9ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS

## 6º Simpósio da Pós-Graduação

Essa aparente contradição em relação ao conjunto universo levou Russell a enunciar o seguinte raciocínio: seja  $X$  um conjunto que consiste em um ‘conjunto de todos os conjuntos que não possuem a si mesmo como elemento’. Entretanto,  $X$  pertence a  $X$ ? Se  $X$  não pertence a  $X$ , então pela sua própria definição, ele deverá pertencer. E se pertencer, ele não deverá pertencer por sua própria definição, de forma que  $X$  pertence a  $X$ , se e somente se  $X$  não pertencer a  $X$ . Logo, a existência de tal conjunto é uma contradição.

Bertrand Russell, para ilustrar o paradoxo acima, utilizou-se do paradoxo do barbeiro, que é uma versão folclórica e mais fácil de entender. Imagina-se uma cidade fictícia onde há apenas um barbeiro, e todos os homens se mantêm barbeados. O barbeiro apenas barbeia quem não barbeia a si mesmo. A questão paradoxal se encontra em: quem barbeia o barbeiro? Ele não pode se barbear, pois ele é o barbeiro (que só barbeia quem não barbeia a si mesmo), e também não pode ir ao barbeiro (pois estaria se barbeando).

Há também um paradoxo análogo aos anteriores, que é autorreferencial e semântico, no qual são propostas as palavras autológicas e heterológicas. Uma palavra é autológica quando descreve a si mesma, como, por exemplo, “palavra” que é uma palavra. O antônimo de autológico é heterológico, ou seja, palavras que não descrevem a si mesmas, como, por exemplo, “verbo” que é um substantivo e não um verbo. Porém, “heterológica” é uma palavra heterológica? Se ela for heterológica, então ela não é, pois não define a si mesma. Mas se ela não for heterológica, ela deverá ser, por não definir a si mesma.

Enfim, o problema em relação ao conjunto universo está em permitir a construção de conjuntos através de uma expressão que descreva todos seus elementos, mais ainda se for utilizada a linguagem natural (como o português ou o inglês) que está cheia de autorreferências, e, assim, será possível definir o conjunto de todos os conjuntos. Porém, certamente esse conjunto, se assim existisse, pertenceria a ele próprio e inevitavelmente causaria uma contradição, que só se resolve não permitindo a existência de tal conjunto (FAJARDO, 2013).

## 2. MATERIAL E MÉTODOS

O desenvolvimento do projeto foi baseado na leitura dos livros, discussão com o orientador e escrita dos estudos. No desenvolvimento do projeto, diversos livros foram consultados, como indicado na referência bibliográfica.

As etapas da pesquisa foram divididas em:



# 9ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS

## 6º Simpósio da Pós-Graduação

- a) Estudo da noção de paradoxos lógicos: o objetivo desta etapa foi desenvolver o domínio da noção de paradoxos lógicos.
- b) Revisão filosófica e histórica dos fundamentos da matemática: nesta fase houve um estudo da influência dos paradoxos nas bases científicas da matemática.
- c) Catalogação dos paradoxos lógicos: nesta etapa, houve um levantamento dos paradoxos da história da matemática.
- d) Estudo dos mais famosos paradoxos lógicos: esta etapa houve um estudo do Paradoxo de Cantor, Paradoxo de Russell e o Paradoxo do Barbeiro.
- e) Escrita de um material sobre os assuntos estudados: esta etapa fechou toda a pesquisa com a produção de um texto matemático sobre os assuntos abordados.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Através do paradoxo apresentado por Russell, a conclusão imediata é que não existe o conjunto universo, ou o conjunto de todos os conjuntos. Conta-se a história da matemática que diversas resoluções foram pensadas para contornar esse problema gerado na teoria dos conjuntos.

O próprio Russell propôs a teoria dos tipos, que consiste em classificar os conjuntos de forma hierárquica. Por exemplo, na aritmética os objetos de primeiro tipo são os números naturais. Os objetos de segundo tipo são os conjuntos de números naturais. Os de terceiro tipo são os conjuntos de conjuntos de números naturais, e assim por diante. Desse modo, a pertinência só é permitida entre um objeto de um determinado tipo e outro do tipo subsequente, evitando o paradoxo, isto é, entre números e conjuntos de números (FAJARDO, 2013).

Outros matemáticos também propuseram alternativas, como Ernest Zermelo e Abraham Fraenkel que consideraram o axioma da separação. Através deste, pode-se definir um conjunto através de uma propriedade, desde que essa propriedade seja estabelecida a partir de um conjunto previamente fixado. Por exemplo, não se pode definir o conjunto de todos os conjuntos finitos, mas é possível definir o conjunto dos números reais que são maiores que 2. Ou seja, dentro de um conjunto previamente fixado, separam-se aqueles que têm a propriedade desejada (FAJARDO, 2013).

Enfim, como o axioma da separação exige para a construção do conjunto uma propriedade, não é possível axiomatizar a teoria dos conjuntos usando-se apenas da imprecisa linguagem natural. Desse modo, a história da matemática caminhará para a busca de linguagens com uma sintaxe e



# 9ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS

## 6º Simpósio da Pós-Graduação

semântica mais adequadas para o discurso científico.

#### 4. CONCLUSÕES

A história da matemática é marcada por “contrárias opiniões”, que é justamente a origem etimológica da palavra paradoxo, que deriva do grego (paradoxon), composta pelo prefixo “pará” que significa “contra” em conjunção com o sufixo “dóxa” que significa “opinião” (FILHO, 2010).

Nesse sentido surgiu o paradoxo de Russell, o qual apareceu como uma opinião contrária à teoria dos conjuntos que estava sendo estabelecida. Ele questionou a existência do conjunto universo e causou a necessidade de transformações na matemática.

O trabalho mostrou que as falhas da lógica e argumentos errôneos são uma característica comum na evolução da matemática, mas não no sentido ruim e sim como um caminho para a construção do conhecimento.

#### REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. Cantor e a Teoria dos Conjuntos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 43, p. 6-14, jan. 2000.

FAJARDO, R. A. S. **Teoria dos Conjuntos**. 2012. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~fajardo/Conjuntos.pdf>>. Acesso em: 10 de novembro de 2016.

FAJARDO, R. A. S. **Elementos da Teoria dos Conjuntos**. 2013. Disponível em: <[https://www.ime.usp.br/~fajardo/Elementos\\_Conjuntos.pdf](https://www.ime.usp.br/~fajardo/Elementos_Conjuntos.pdf)>. Acesso em: 10 de novembro de 2016.

FILHO, I. F. B. Alguns Paradoxos da Matemática: Um Resgate Histórico e Possibilidades para o Ensino e Aprendizagem. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, XXXIII., 2010, Águas de Lindóia. **Anais do CNMAC**. 2010. p. 1752-1758. v. 3.