



## SOLUÇÕES EM SÉRIE PARA EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Alice J. da SILVA<sup>1</sup>; Maria J. F. GOMES<sup>2</sup>

### RESUMO

O desenvolvimento de técnicas para resolução de problemas que envolvam equações diferenciais é de fundamental importância para o desenvolvimento tecnológico e científico. Existem muitos métodos sistemáticos para construção de soluções fundamentais no caso de equações diferenciais com coeficientes constantes. Para tratar uma classe maior de equações com coeficientes variáveis, é necessário estender a procura além das funções elementares do Cálculo. Neste trabalho aprofundamos os estudos através da representação de uma função em série de potências. O estudo iniciado apresenta resultados parciais, abordando representação de uma série qualquer em uma série de potência, com o uso da manipulação de séries geométricas, diferenciação ou integração da série dada. A solução em série para equações lineares de segunda ordem determina os coeficientes de modo a satisfazer a equação diferencial, supondo que a solução tem expansão em série de potência.

**Palavras-chave:** Pontos ordinários; Pontos Singulares; Séries de potências.

### 1. INTRODUÇÃO

Equações diferenciais ordinárias é um objeto de pesquisa com muitas questões interessantes em aberto e grande parte dos problemas físicos envolve modelos matemáticos abordando equações diferenciais. O desenvolvimento de técnicas para resolução de problemas que envolvam equações diferenciais é de fundamental importância para o desenvolvimento tecnológico e científico. Um intenso estudo na área tem sido realizado por grandes nomes da matemática durante séculos. Com destaque para equações diferenciais de segunda ordem, podemos mencionar: Euler, Legendre, Bessel, Airy, Chebyshev, Hermite e Laguerre.

Uma equação diferencial que descreve algum problema é um modelo matemático. Sua construção envolve a parte mais difícil do processo. Devemos reconhecer que cada problema é diferente, mas que, apesar disso, segundo Boyce e DiPrima pode ser útil listar alguns passos que fazem parte da modelagem:

1. Identifique as variáveis independente e dependente e atribua letras para representá-las. (...)
2. Escolha as unidades de medida de cada variável. (...)
3. Use o princípio básico subjacente ou a lei que reage o problema em investigação. (...)
4. Expresse o princípio ou lei do passo 3 em função das variáveis escolhidas no passo 1. (...)
5. Certifique-se de que cada parcela em sua equação está nas mesmas medidas físicas. (...)
6. (...) Lembre-se (...) o modelo matemático resultante pode ser mais complicado, podendo envolver, por exemplo, um sistema com várias equações diferenciais. (BOYCE.; DIPRIMA, 2006, p.5).

---

1 IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre. alice.jennefer@hotmail.com

2 IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre. mariajosiane.gomes@ifsuldeminas.edu.br



Depois de formular a equação diferencial apropriada, surge o problema de encontrar uma solução que satisfaça esta equação.

Dentro do contexto de equações diferenciais ordinárias, desenvolveremos neste trabalho um estudo de soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem pelo método de soluções em série. Os estudos iniciais envolveram estudos de séries e convergência, em particular, o estudo de séries de potências.

Consideramos neste trabalho o problema de encontrar soluções de uma equação da forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (1)$$

Onde  $P, Q$  e  $R$  são polinômios. Consideramos também que um ponto  $x_0$  no qual  $P(x_0) \neq 0$  é chamado de ponto ordinário e de ponto singular, se  $P(x_0) = 0$ .

O trabalho está dividido da seguinte forma:

Etapa 1. Desenvolvimento de estudos de expansão em série de funções e convergência de séries, com atenção particular a séries de potências.

Etapa 2. Estudo de métodos analíticos para resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem.

Etapa 3. Solução em Série na vizinhança de um ponto singular: Será considerado o problema de encontrar soluções da equação dada em (1) na vizinhança de um ponto ordinário  $x_0$ . O processo do método consiste em supor que de fato a eq. (1) tem uma solução e que  $\varphi$  tem uma série de Taylor,

$$y = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (2)$$

Convergente para  $|x - x_0| < \rho$ , onde  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$ .

Etapa 4. Solução em Série na vizinhança de um ponto ordinário: Será considerado o problema de que se  $x_0$  é um ponto ordinário da eq. (1), então existem soluções da forma (2).

---

1 IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre. alice.jennefer@hotmail.com

2 IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre. mariajosiane.gomes@ifsuldeminas.edu.br



# 9ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS

## 6º Simpósio da Pós-Graduação

ISSN 2319-0124

Na fase atual de desenvolvimento do trabalho, realizamos a Etapa 1 e a Etapa 2 está sendo desenvolvida. Na Etapa 1 foram abordados os tipos de séries e os métodos de convergência. Podemos destacar os seguintes: o teste da divergência, da integral, da comparação, de comparação do limite, da razão e da raiz.

Se a série não é uma série de potências, utilizamos a manipulação por séries geométricas, a diferenciação ou a integração das séries dada para representá-las.

Um fator fundamental é que, o estudo de métodos analíticos para obtenção de soluções de equações diferenciais de primeira ordem encerra o conteúdo das aulas de Cálculo IV, no 5º período do curso de Licenciatura em matemática. Logo, é importante aprofundar o estudo neste assunto, pois além do extenso contexto de aplicações do tema, envolve a pesquisa em vários temas da matemática, como análise matemática e álgebra linear, fortalecendo assim a base matemática na formação da estudante.

O objetivo deste trabalho é o estudo de soluções em série para equações diferenciais lineares de segunda ordem. Observa-se que, para encontrarmos a solução geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem, dependemos da determinação de um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea. Entretanto, para tratar uma classe muito maior de equações com coeficientes variáveis, é necessário entendermos a busca de soluções além das funções elementares do Cálculo. Por este motivo, a ferramenta principal é a representação de uma função dada em série de potências.

## 2. MATERIAL E MÉTODOS

O trabalho tem sido desenvolvido através de estudos teóricos, com a utilização do livro mencionado nas referências, direcionados pela orientadora; reuniões frequentes para discussões sobre o tema; apresentações realizadas pela estudante para a orientadora sobre um tópico selecionado, afim de se verificar a compreensão do mesmo.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em relação à convergência de séries, um dos testes mais úteis para a convergência absoluta de uma série de potências é o teste da razão, também conhecido como Teste de D'

---

1 IFSULDEMINAS – *Campus* Pouso Alegre. alice.jennefer@hotmail.com

2 IFSULDEMINAS – *Campus* Pouso Alegre. mariajosiane.gomes@ifsuldeminas.edu.br



# 9ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS

## 6º Simpósio da Pós-Graduação

ISSN 2319-0124

Alembert.

Destaca-se que há um vasto campo de estudo na área da matemática envolvendo o tema equações diferenciais e este trabalho desenvolvido abordará apenas a parte de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Por ser um projeto que se encontra no início de seu cronograma, o texto apresenta os resultados parciais e com o aprofundamento dos estudos serão obtidos resultados mais consistentes do que os sinalizados anteriormente.

Considerando o objetivo, que resumidamente é solucionar equações lineares de segunda ordem com foco no método de séries, iniciaram-se os estudos e a conclusão das etapas propostas culminarão na finalização deste trabalho.

#### 4. CONCLUSÕES

Em linhas gerais, este trabalho oferece condições para se continuar os estudos, de forma a concluir o cronograma do projeto e, mesmo após o término da graduação; pois a participação neste incentiva o estudo de novas áreas de pesquisa em matemática.

#### REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 2006.

---

1 IFSULDEMINAS – *Campus* Pouso Alegre. alice.jennefer@hotmail.com

2 IFSULDEMINAS – *Campus* Pouso Alegre. mariajosiane.gomes@ifsuldeminas.edu.br