

**11ª Jornada Científica e
Tecnológica do IFSULDEMINAS**
& **8º Simpósio de
Pós-Graduação**

**PROPRIEDADES DE ESCALA EM UM POÇO DE POTENCIAL
DEPENDENTE DO TEMPO**

Áquila C. de P. FARIAS¹; Flávio H. GRACIANO²

RESUMO

Neste trabalho consideramos o modelo do poço de potencial dependente do tempo e construímos o mapeamento discreto bidimensional nas variáveis energia e fase que descreve a dinâmica do sistema. Mostramos que o espaço de fases é do tipo misto, contendo mar de caos, curvas invariantes e ilhas de estabilidade. Definimos a energia quadrática média, estudamos sua evolução no tempo e discutimos leis de escala para o comportamento dessa evolução.

Palavras-chave: Leis de Escala, Colisões Múltiplas.

1. INTRODUÇÃO

Devido ao fato de poder descrever matematicamente sistemas naturais, o estudo em sistemas dinâmicos foi uma área atraente de pesquisa ao longo do desenvolvimento da ciência. Galileu Galilei (GALILEI, 2010) estudou sobre os pêndulos, planos inclinados, projéteis e a queda livre. Isaac Newton (NEWTON, 2010), foi um dos primeiros a ser capaz de descrever sistemas físicos através de um conjunto de leis que, por sua vez, tornaram possíveis escrever um conjunto de equações que regessem esses sistemas. Devido ao caráter determinístico, acreditava-se que fenômenos descritos no mundo macroscópico poderiam ser previsíveis, e que, através de uma condição inicial e conhecendo as equações de movimento, fosse possível construir sua trajetória. No entanto, devido a dificuldades no tratamento analítico das equações não lineares que descrevem propriedades caóticas, muitas características dos sistemas dinâmicos ficaram ignoradas até meados do século XX, ainda que estivessem contidas em equações diferenciais conhecidas há três séculos.

Partículas que se movem ao longo de poços de potenciais ou barreiras potenciais são sistemas estudados em mecânica clássica, mecânica quântica e eletrodinâmica. Temos alguns estudos recentes nas referências (PAL, 2017 e MEHTA, 2018) . Esses sistemas pode ser descritos através do uso de diferentes métodos que podem variar desde abordagens quânticas, onde a equação de Schrödinger é resolvida, até investigações de caos clássico, onde mares caóticos são

¹Aluno, IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre. E-mail: aquila_98@hotmail.com.

²Pesquisador, IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre. E-mail: flavio.graciano@ifsuldeminas.edi.br.

caracterizados por expoentes de Lyapunov, passando por transições de fase com a variação dos parâmetros de controle, entre outras abordagens (COSTA, 2014)

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O modelo do poço de potencial dependente periodicamente do tempo (figura 1) é dado por uma caixa com potencial infinito nas bordas e com um poço que possui o fundo oscilante. Para esse modelo a energia potencial $V(x, t)$ é dada por

$$V(x, t) = \begin{cases} \infty & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq (a+b) \\ V_0 & \text{se } 0 < x < \frac{b}{2} \text{ ou } \left(a + \frac{b}{2}\right) < x < (a+b) \\ V_1 \cos(wt) & \text{se } \frac{b}{2} \leq x \leq \left(a + \frac{b}{2}\right) \end{cases} \quad (1)$$

onde a, b, V_0, V_1 e w são constantes, sendo a a largura do poço, b o dobro da largura do potencial fixo, V_0 o potencial fixo, V_1 o potencial oscilante e w a frequência de oscilação do fundo que se move periodicamente no tempo.

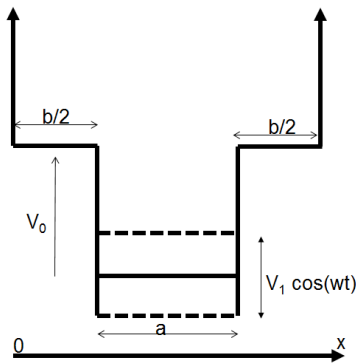


Figura 1: Esquema do poço de potencial dependente do tempo.

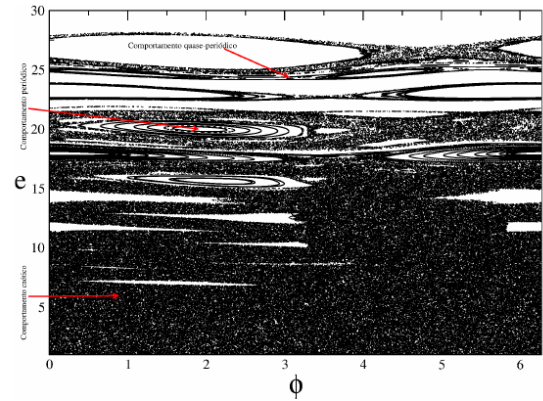


Figura 2: Espaço de fases do poço de potencial oscilante gerado com $r = 1$, $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0, 5$.

O mapeamento do modelo estudado pode ser escrito em variáveis adimensionais por

$$T_x = \begin{cases} e_{n+1} = e_n + \delta [\cos(\phi_n + i \Delta \phi_a) - \cos \phi_n] \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + i \Delta \phi_a + \Delta \phi_b] \bmod 2\pi \end{cases}, \quad (2)$$

onde i é o menor inteiro tal que

$$e_{n+1} = e_n + \delta [\cos(\phi_n + i \Delta \phi_a) - \cos \phi_n] > 1,$$

$\Delta \phi_a$ e $\Delta \phi_b$ são dados por

$$\Delta \phi_a = \frac{2\pi N_c}{\sqrt{e_n - \delta \cos(\phi_n)}} \text{ e } \Delta \phi_b = \frac{2\pi N_c r}{\sqrt{e_{n+1} - 1}} \quad (3)$$

onde r , N_c e δ são parâmetros de controle.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Foi encontrado o espaço de fases para o mapeamento acima (figura 2), através de simulações feitas por algoritmo escrito em Fortran e com o auxílio do *software* Xmgrace. Com esse mesmo recurso, estudamos as propriedades de escala (LEONEL, 2015) para o modelo em função dos parâmetros de controle N_c e r iterando computacionalmente um conjunto de condições

iniciais dadas no mar de caos usando a expressão $\bar{e}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^2_{i,j}$, onde M é o ensemble de condições iniciais, e n é o número de iterações.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para esse modelo, foi encontrado um espaço de fases do tipo misto, contendo ilhas de estabilidade, curvas invariantes e mar de caos. Definimos a energia quadrática média (LIVORATI, 2015) denotada por $e_{RMS} = \sqrt{\bar{e}^2}$ e estudamos numericamente suas propriedades de escala para os parâmetros r e N_c . Para tempos curtos, vimos que para ambos os parâmetros essa grandeza é crescente, caracterizada por uma lei de potência e que após um regime de *crossover*, as curvas convergem para um platô de saturação para tempos longos (figuras 3 e 4). Esse comportamento nos permite usar três hipóteses de escala no estudo do comportamento da e_{RMS} para cada um dos parâmetros de controle. Considerando n_x o *crossover* de saturação, a primeira hipótese é para $n \ll n_x$, onde as curvas de crescimento são descritas por $e_{RMS} \sim [n\delta^2]^\beta$ e β é chamado de

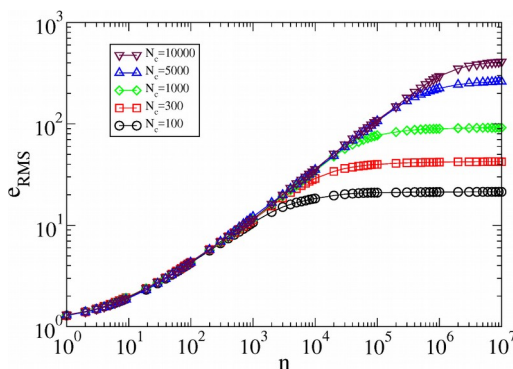


Figura 3: Comportamento de e_{RMS} vs. n para diferentes valores de N_c , com $r = 1$ e $\delta = 0,5$.

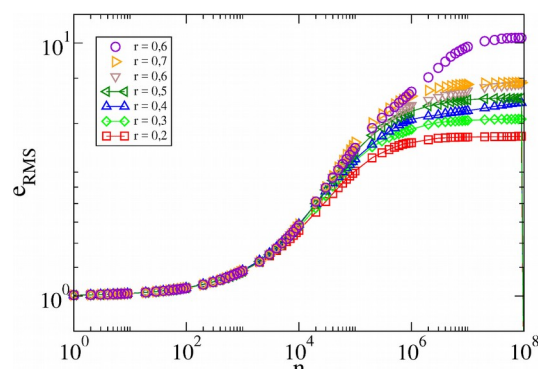


Figura 4: Comportamento de e_{RMS} vs. n para diferentes valores de r , com $N_c = 33, 18$ e $\delta = 0,5$.

exponente de aceleração, a segunda para $n \gg n_x$, onde $e_{sat} \sim N_c^\alpha$ e α é chamado de expoente de saturação e a terceira para $n = n_x$, onde $n_x \sim N_c^z$, e z é chamado de expoente de

crossover. Através dessas três hipóteses podemos descrever o comportamento da e_{RMS} como uma função homogênea generalizada, dada por $e_{RMS}(n\delta^2, N_c) = l e_{RMS}(l^p n\delta^2, l^q N_c)$ onde l é um fator de escala e p e q são expoentes característicos. Na evolução de um conjunto de condições iniciais dadas no mar de caos, encontramos que para N_c a evolução do sistema obedece uma lei de escala onde $\alpha \simeq 1/2$, $\beta \simeq 2/3$ e $z \simeq 4/3$. Para r , encontramos a mesma lei de escala com $\alpha = 0,30(2)$, $\beta = 0,196(9)$ e $z = 1,54(3)$.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos o modelo do poço de potencial dependente do tempo e construímos o mapeamento bidimensional para o modelo. Encontramos um espaço de fases do tipo misto, contendo curvas invariantes, ilhas de periodicidade e mar de caos.. Estudamos a evolução de um conjunto de condições iniciais dadas no mar de caos para os parâmetros de controle N_c e r . Para N_c , concluímos que a evolução do sistema obedece uma lei de escala onde $\alpha \simeq 1/2$, $\beta \simeq 2/3$ e $z \simeq 4/3$. Para r , encontramos a mesma lei de escala com $\alpha = 0,30(2)$, $\beta = 0,196(9)$ e $z = 1,54(3)$.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Pouso Alegre.
NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Pouso Alegre.

REFERÊNCIAS

- COSTA, D. R. da; CALDAS, I. L.; LEONEL E. D. **Phase space properties and chaotic transport for a particle moving in a time dependent step potential well.** *Appl. Math. Comput.* 236, 215, 2014.
- GALILEI, G. **Siderus Nuncious: O mensageiro das estrelas.** 2010.
- LEONEL, E. D. **Fundamentos Da Física Estatística.** Edgard Blucher, São Paulo, 2015.
- LIVORATI, A.L.P.; DETTMANN C.P.; CALDAS I.L.; LEONEL, E.D. **Chaos** 25, 103107:1-2, 2015.
- MEHTA, N. P.; HAZZARD, K. R. A.; TICKNOR, C. **Model for scattering with proliferating resonances:** Many coupled square wells. *Phys. Rev. A* 98, 062703, 2018.
- NEWTON, I. **Newton's principia: mathematical principles of natural philosophy.** 2010.
- PAL, b; DUTTA, D. ; PORIA, S. **Pramana J. Complex dynamics of a particle in an oscillating potential field.** *Phys.* 89, 32, 2017.