MAPA SENO E O TRAVAMENTO DE FREQUÊNCIA

Carlos E. de P. ABREU[1]; Valdir B. da S. JÚNIOR[2]; Joelson D. V. HERMES[3]

RESUMO

O presente estudo busca investigar o mapa seno no que se refere ao fenômeno de travamento de frequência. Através das simulações numéricas foi possível identificar no espaço de parâmetros esse fenômeno, o qual está relacionado às Línguas de Arnold. Notamos ainda que essas estruturas aparecem no espaço de parâmetros mesmo quando utilizamos o expoente de Lyapunov como observável.

Palavras-chave: Caos; Sistemas Dinâmicos; Línguas de Arnold.

1. INTRODUÇÃO

O mapa do círculo, assim como o mapa logístico, apresenta uma forma enganosamente simples a qual dá lugar a um comportamento complexo e rico. Geralmente, um mapa do círculo unidimensional (1D) é dado da seguinte forma:

$$f(x) = x_{n+1} = x_n + \omega + g(x_n) \quad mod 1 \tag{1}$$

onde o ângulo x foi normalizado de [0,1), ω é a frequência natural do mapa e $g(x)$ é a componente não linear (FERRARA, 1994).

Vladimir Arnold com o intuito de entender a dinâmica de um rotor introduziu o exemplo com 2 parâmetros:

$$x_{n+1} = x_n + \omega - \frac{k}{2\pi} sin(2\pi x_n) \quad mod 1 \tag{2}$$

o parâmetro de acoplamento k controla a amplitude de oscilação do mapa, ω aplica um deslocamento vertical positivo ao mapa, tal mapeamento é conhecido como mapa seno. Esta ideia também foi motivada pela possibilidade do estado de um sistema poder ser representado por um ponto na superfície de um toróide. Dessa forma a representação do movimento pode ser

1 Professor, IFSULDEMINAS – *Campus* Inconfidentes. E-mail: carlos.abreu@ifsuldeminas.edu.br.
2 Professor, IFSULDEMINAS – *Campus* Inconfidentes. E-mail: valdir.junior@ifsuldeminas.edu.br.
3 Professor, IFSULDEMINAS – *Campus* Inconfidentes. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br.

simplificada tomando-se a seção de Poincaré, então os pontos de interseção estarão sobre um círculo no plano de Poincaré (ARNOLD, 1965).

O objetivo do presente estudo é investigar o mapa seno no que se refere ao fenômeno de travamento de frequência.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O Expoente de Lyapunov pode nos auxiliar na distinção entre o comportamento quase-periódico do caótico, já que ambos aparecem muito similares no diagrama de bifurcação, a Figura 1 traz o diagrama de bifurcação juntamente com o expoente de Lyapunov, o qual é positivo nas regiões caóticas e negativo onde o comportamento é periódico. Percebe-se ainda que para k<1 o expoente de Lyapunov é igual a zero indicando que essa região apresenta um comportamento quase-periódico.

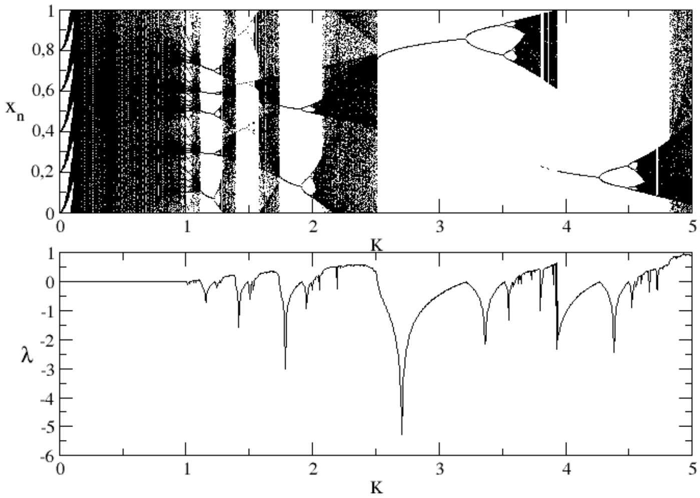

Figura 1: Diagrama de bifurcação juntamente com o expoente de Lyapunov para o mapa seno.

O cenário de quase-periodicidade apresenta uma “competição” entre duas ou mais frequências independentes que caracterizam a dinâmica do sistema. Se a razão entre elas é um número racional tem-se travamento de frequência no sistema, por outro lado, se a razão é um número irracional, o comportamento do sistema é quase-periódico.

Em um oscilador não linear com duas frequências de oscilação F_1 e F_2, a razão entre essas frequências é chamada número de rotação.

$$\rho = \frac{F2}{F1}. \qquad (3)$$

O número de rotação ρ diz quanto tempo a trajetória gira ao redor da pequena seção cada vez que gira ao redor da grande circunferência do toro. Para o mapa seno, ρ é definido da seguinte forma:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0) - x_0}{n}. \tag{4}$$

Travamento de frequência ou sincronização de frequência é um fenômeno comum sempre que dois ou mais osciladores interagem não linearmente. Se o número de rotação é racional sobre algum intervalo de valores do parâmetro de controle, então os dois osciladores estão num estado de travamento de frequência e dão origem a Línguas de Arnold (FERRARA, 1994).

3. MATERIAL E MÉTODOS

O método de estudo consiste em construir o espaço de parâmetros para o mapa a fim de verificarmos o aparecimento das Línguas de Arnold. Ao longo do trabalho todas as simulações numéricas foram feitas usando um algoritmo escrito em Fortran e os dados obtidos foram usados para gerar os gráficos usando o software Gnuplot.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A largura dos intervalos em que ocorre o travamento de frequência pode ser estudada como função do parâmetro de não linearidade K. O diagrama esboçado no plano $K{-}\omega$ desses intervalos forma uma série de triângulos estreitos levemente distorcidos, conhecidos com Línguas de Arnold. A Figura 2 apresenta o espaço de parâmetros para o mapa seno onde a paleta de corres representa o número de rotação ρ.

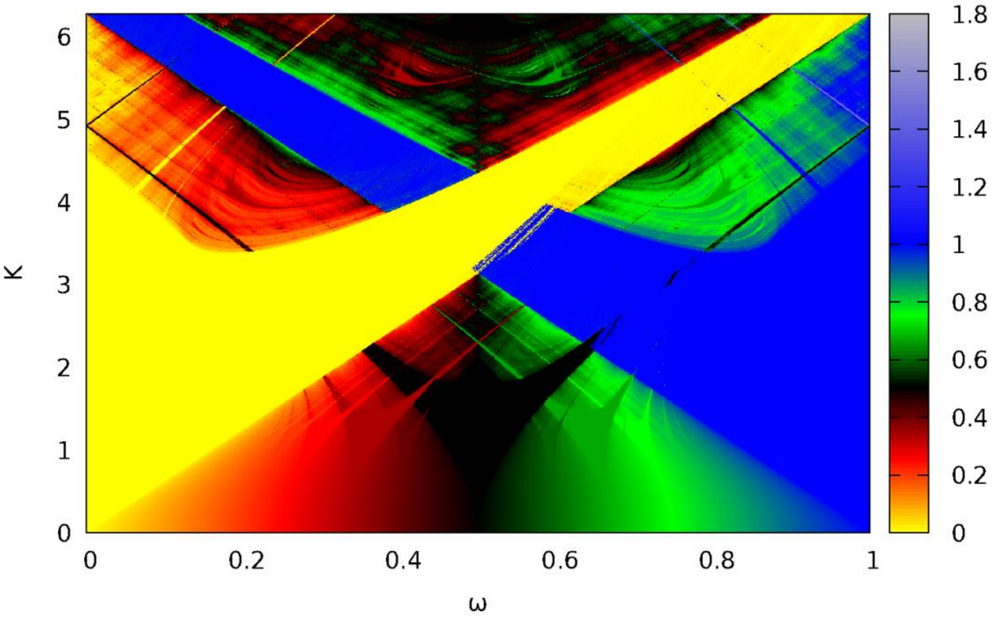

Figura 2: Espaço de parâmetros para o mapa seno, onde a paleta de cores corresponde ao numero de rotação ρ.

As línguas de Arnold também podem ser observadas substituindo o número de rotação pelo expoente de Lyapunov, como podemos verificar na Figura 3.

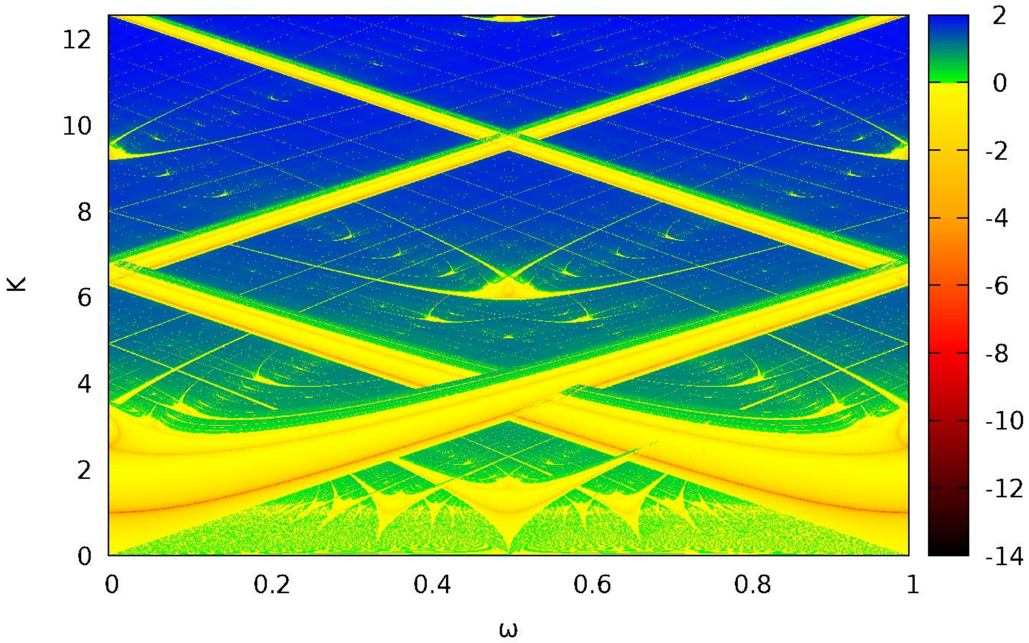

Figura 3: Espaço de parâmetros para o mapa seno onde a paleta de cores representa o expoente de Lyapunov.

5. CONCLUSÕES

O mapa seno apresentou uma dinâmica realmente muito rica, uma vez que através do espaço de parâmetros com uma das variáveis sendo o número de rotação, conseguimos identificar o travamento de frequência e consequentemente as línguas de Arnold, além disso, ao utilizarmos o expoente de Lyapunov na escala de cores essas mesmas estruturas foram verificas assim como estruturas periódicas conhecidas na literatura como *shrimp*.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.

NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.

REFERÊNCIAS

ARNOLD, V. I., *Small denominators I:* mapping the circumference into itself, American Mathematical Society Translations, Series 2, 46, 213 (1965).

COSTA, D. R. da; et.al. The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimension maps. Physical Review Letters A, v. 380, p. 1610-1614, 2016.

FERRARA, N. F.; PRADO, C. P. C.: Caos – Uma Introdução. Editora Blucher, 1994.