

11ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS & 8º Simpósio de Pós-Graduação

DECAIMENTO ASSINTÓTICO PARA O MAPA QUADRÁTICO

Lediane M. MOREIRA¹; Joelson D. V. HERMES²

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar brevemente a equação do Mapa Quadrático e mostrar como a mesma pode ser obtida por meio de uma transformação linear da equação de um dos mais conhecidos mapeamentos, o Mapa Logístico. Exibimos o expoente de Lyapunov para o mapeamento em questão, o qual tem como característica principal verificar a sensibilidade às condições iniciais. Além disso, um dos principais objetivos desse trabalho é a determinação dos expoentes característicos, por meio de hipóteses de escala, o que mostra a invariância de escala para o mapa.

Palavras-chave: Sistemas não-lineares; Caos; Mapa Unidimensional.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente os estudos referentes à teoria dos Sistemas Dinâmicos tem se tornado objeto de estudo não somente de matemáticos e físicos, mas envolve também profissionais de outras áreas, tais como, economistas, biólogos e engenheiros.

Em 1963 o assunto teve maior repercussão quando o meteorologista, matemático e filósofo Edward Lorenz verificou, em suas tentativas de prever o clima, que os sistemas dependem sistematicamente das condições iniciais. Lorenz tentava prever o clima em longo prazo, fazendo uso de computadores de sua época, porém, encontrava resultados muito diferentes para cada condição inicial em sua simulação, mesmo essas condições sendo bem próximas, dessa forma surgiu uma das primeiras evidências de caos em um sistema (LORENZ, 1963).

Com o intuito de contribuir para desenvolvimento dessa área de estudo, no presente trabalho temos como pretensão apresentar brevemente a equação do mapa quadrático e posteriormente o expoente de Lyapunov para o mesmo, assim como, propor algumas hipóteses de escala a fim de explicar o decaimento assintótico para o mapeamento e com isso determinar os expoentes característicos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A equação do Mapa Quadrático pode ser obtida por meio de uma transformação linear do tipo $y = ax + b$, aplicada à equação do Mapa Logístico. A equação do mapeamento Logístico foi descrita

1 Bolsista PIBIC/CNPq, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: ledianemoreira@outlook.com

2 Orientador, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br

pelo biólogo Robert May em 1976, para estudo da dinâmica populacional de insetos (MAY, 1976), representada por:

$$Y_{n+1} = RY_n(1 - Y_n), \quad (1)$$

substituindo a equação linear citada e reordenando convenientemente os termos teremos:

$$X_{n+1} = -X_n^2 + C, \quad (2)$$

que é a equação do Mapa Quadrático, o qual tem C como parâmetro de controle que varia intervalo de $[0,2]$. O diagrama de bifurcações do Mapa Quadrático, Figura 1 (a), nos permite notar que inicialmente o comportamento do mapeamento é regular, mas depois de uma sequência de bifurcações seu comportamento passa a ser caótico a partir de um determinado valor crítico do parâmetro C .

3. MATERIAL E MÉTODOS

Para desenvolvimento deste trabalho foi realizado um tratamento analítico para o estudo das propriedades do mapa e também uma abordagem numérica com a escrita de um algoritmo em Fortran. Além disso, foi utilizado o *software* Xmgrace para obtenção do gráfico, possibilitando assim a observação de seu comportamento de forma mais abrangente.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Quando nos referimos ao estudo dos sistemas dinâmicos tende-se a pensar em sistemas que apresentam na maioria das vezes comportamentos caóticos, para isso, recorreremos ao expoente de Lyapunov, tais números são utilizados como indicadores de caos e são obtidos a partir da distância de trajetórias de duas condições iniciais distintas (FIEDLER-FERRARA,1994).

Uma bifurcação é uma mudança de características do ponto fixo de um sistema, o qual passa de estável a instável, ou vice-versa (FIEDLER-FERRARA,1994). Por meio da Figura 1 pode-se notar que nos pontos de bifurcação o expoente de Lyapunov é igual a zero e nos intervalos em que ele é negativo o mapa apresenta regularidade, já onde é positivo tem comportamento caótico. A bifurcação ocorrida em $C = 0,75$ é chamada de bifurcação de duplicação de período, para a qual será feita a investigação de escala.

Observando o comportamento apresentado na Figura 2 percebe-se que dependendo da distância ao ponto fixo $X - X^* = D_0$, a órbita permanece confinada a um platô constante e, após atingir um número de iterações n_x , número de crossover, a órbita sofre uma transição de um regime constante para um decaimento em lei de potência.

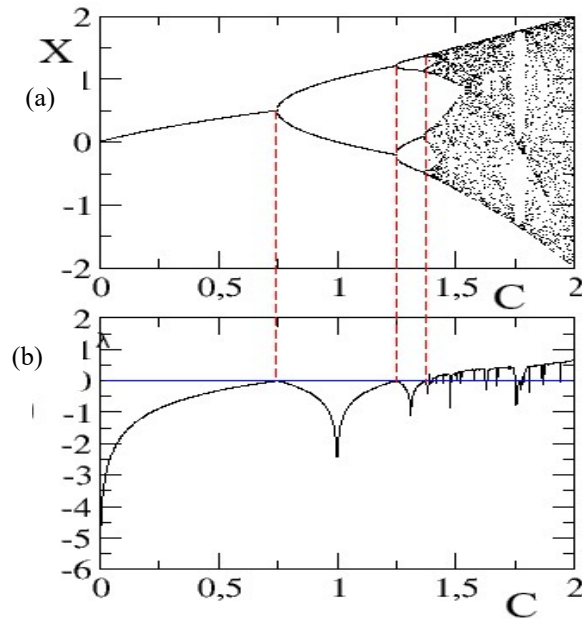


Figura 1- Diagrama de bifurcação do Mapa Quadrático (a) juntamente ao diagrama de Lyapunov (b).

A partir do comportamento observado na Figura 2, podemos supor as seguintes hipóteses de escala:

- 1) Para n suficientemente pequeno, $n \ll n_x$, o comportamento de x versus n é dado por:

$$X(n) \propto D_o^\alpha, \quad (3)$$

e como $X \propto X_o^\alpha$, concluímos que $\alpha=1$.

- 2) Para n suficientemente grande, $n \gg n_x$, a variável dinâmica é descrita como:

$$X(n) \propto D_o^\beta, \quad (4)$$

onde β é um expoente de transição.

- 3) Por fim, o número de iterações n_x é dado por:

$$n_x \propto D_o^z, \quad (5)$$

onde z é um expoente de transição.

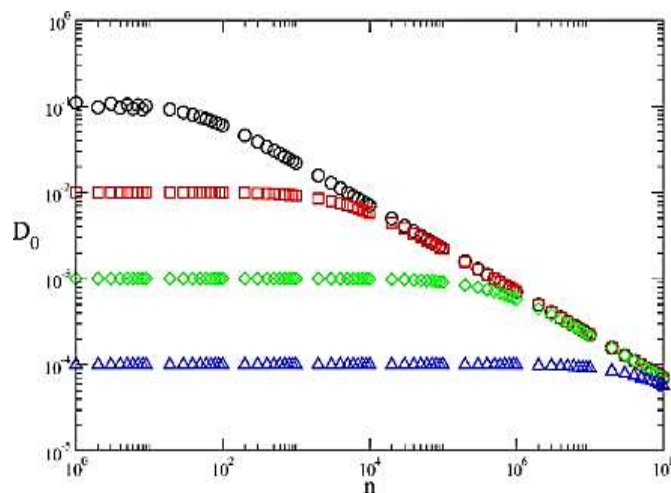


Figura 2: Convergência para o ponto fixo para diferentes condições iniciais.

Os expoentes β e z podem ser determinados considerando os gráficos das Figuras 2 e 4. Na Figura 2, após o platô constante, uma lei de potência fornece $\beta = -\frac{1}{2}$. Já a Figura 4 fornece o comportamento de n_x versus D_0 , através da qual podemos obter o expoente $z = -2$.

Uma vez conhecidos os expoentes, podemos utilizá-los para redimensionar as variáveis x e n de tal forma que

$$D_0 \rightarrow \frac{D_0}{D_0^\alpha} \text{ e } n \rightarrow \frac{n}{D_0^z}, \quad (6)$$

Fazendo com que todas as curvas de x versus n sobreponham-se em uma única curva, como mostrado na Figura 3, validando as hipóteses e os resultados encontrados.

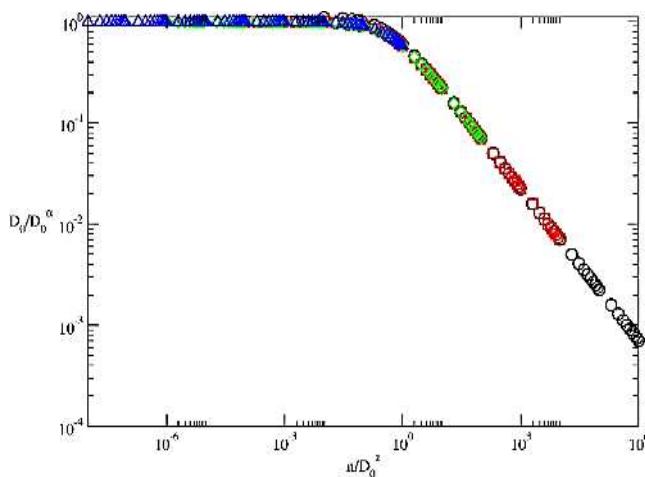


Figura 3: Sobreposição de todas as curvas após a reescala dos eixos.

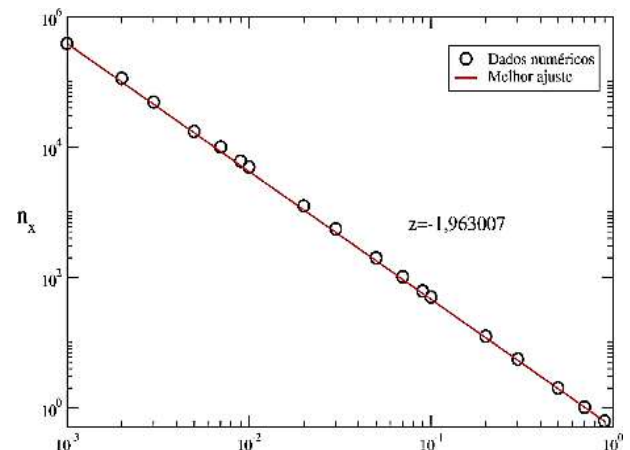


Figura 4: Número de crossover n_x em função da condição inicial x_0 .

5. CONCLUSÕES

Com o estudo do expoente de Lyapunov foi possível observar as mudanças de comportamento, periódico a caótico. Estudamos o decaimento para o ponto fixo em uma bifurcação de duplicação de período, sugerindo as hipóteses de escala que permitiram estabelecer os possíveis expoentes críticos, essas hipóteses puderam ser confirmadas devido à reescala das variáveis do sistema e a sobreposição das demais curvas.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.
NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.

REFERÊNCIAS

- FIEDLER-FERRARA, N.; DO PRADO, C. C. **Caos: uma introdução**. 1994.
LORENZ, E. N. **Deterministic non periodic flow**1. journal of the atmospheric sciences, v. 20, n. 2, p. 130-141, 1963.
MAY, R. M. **Simple mathematical models with very complicated dynamics**. Nature, v. 261, p. 459 - 467, 1976.