11ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS
& 8º Simpósio de Pós-Graduação

COMPROVAÇÃO DA EFICIÊNCIA DO MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS MEDIANTE A RETA DE REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

Natanael F. D. BATISTA[1]; Tiago G. BOTELHO[2]

RESUMO

O Ajuste de Curvas em equações lineares é muito utilizado para, a partir de dados conhecidos, realizar extrapolações. É importante que os cálculos envolvidos no ajuste de curvas sejam o mais conciso e robusto possível, para que, ao final, obtenha-se a melhor equação linear, garantindo uma boa extrapolação. Existe a técnica de Mínimos Quadrados que otimiza a busca do melhor ajuste para um conjunto de dados, tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. O objetivo deste artigo é demonstrar por meio de uma aplicação computacional de retas de regressão simples por força bruta, que o Método dos Mínimos Quadrados realmente obtém a melhor equação que representa os valores do conjunto de dados do problema.

Palavras-chave: Análise de algoritmos; Matemática Computacional; Linguagem de Programação C; Ajuste de Curvas.

1. INTRODUÇÃO

O Ajuste de Curvas em equações lineares é utilizado para definir uma reta que promove o melhor ajuste de um conjunto de pontos, e com a análise dessa reta, pode-se realizar extrapolações e/ou estimações. Desta forma é possível, por exemplo, à partir dos dados de consumo de energia elétrica de uma cidade, fazer projeções para o futuro do consumo de energia da mesma. Segundo Almeida (2015), a representação da equação é baseada na variável independente ou explicativa **x**, que é relacionada com a variável dependente ou resposta **y**, por meio de um modelo linear, definido por:

$$y = a_1 * x + a_0 \qquad \text{(I)}$$

Na equação (I), as constantes $\mathbf{a_0}$ e $\mathbf{a_1}$ fornecem o menor erro quando os pontos medidos são substituídos, como visto em GILAT (2008). Além da definição da equação (I), calcula-se um número que quantifica a concordância geral entre os pontos pertencentes a esse conjunto de dados e a equação utilizada. Esse número é a soma das distâncias ao quadrado dos pontos à reta, ele é usado tanto para comparar duas equações diferentes no ajuste do mesmo conjunto de pontos, quanto para determinar os coeficientes da equação que levem ao melhor ajuste, declarado em GILAT (2008).

[1] IFSULDEMINAS – Campus Muzambinho - E-mail: natanaelfdbatista99@gmail.com
[2] IFSULDEMINAS – Campus Muzambinho - E-mail: tiago.botelho@muz.ifsuldeminas.edu.br

O Método de Mínimos Quadrados foi criado em meados do século XIX por Galileu Galilei para calcular as constantes $\mathbf{a_0}$ e $\mathbf{a_1}$ da equação (I), que levem ao menor ajuste de um determinado conjunto de ponto, conforme GILAT (2008) e os cálculos vistos em RUGGIERO (2015). FILHO (2013) menciona que o Método dos Mínimos Quadrados consiste em produzir o menor valor possível de ajuste, no entanto ele prova através de dedução matemática, mas não apresenta um algoritmo para encontrar o menor valor de ajuste por meio de força bruta, utilizando várias equações de regressão linear simples. Assim, diversas bibliografias foram consultadas, mas sem um método computacional para encontrar o valor de ajuste adequado. As bibliografias consultadas foram BARROSO (1987), FRANCO (2007), SPERANDIO, MENDES e SILVA (2003) e PUGA, TÁRCIA e PAZ (2009).

Assim, o objetivo desta pesquisa é comprovar computacionalmente que o Método de Mínimos Quadrados apresenta a equação mais eficiente que representa o conjunto de dados. Nesse sentido, foi criado um programa de computador em linguagem C que representa este método, e um outro programa que testa várias equações, mediante retas de regressão simples com dois pontos por computação utilizando força bruta em um dado intervalo. A intenção da presente pesquisa é comparar as equações advindas destes programas.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Para aplicação computacional tanto do Método de Mínimos Quadrados, quanto das retas de regressão simples por força bruta, definiu-se cinco pontos, conforme **Tabela 1**:

Tabela 1: Entradas dos programas.

x	0,3	2,7	4,5	5,9	7,8
y	1,8	1,9	3,1	3,9	3,3

Após submeter estes dados no programa, verificou-se os resultados gerados para serem analisados. No programa do Método de Mínimos Quadrados foram usadas as fórmulas presentes na **Figura 1**.

$$b_0 = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

$$b_1 = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$$

Figura 1: Fórmulas utilizadas para o Método de Mínimos Quadrados.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o segundo código, do teste de retas de regressão simples em um intervalo, utilizou-se o código em linguagem C. Veja nesse link encurtador.com.br/lquS9 os códigos gerados para a pesquisa.

Foi testado o código do teste de retas de regressão simples em um intervalo, até encontrar o menor ajuste possível. Esse programa foi definido da seguinte forma para a computação por força bruta: escolheu-se o ponto de menor valor em relação a coordenada y e outro de maior valor em relação a coordenada y; fez-se a diferença dos valores da coordenada y destes dois pontos (definida como DIF) e definiu um intervalo na coordenada y do menor y - DIF até o maior y + DIF, garantindo uma melhor escolha da equação. Definido o intervalo, o programa testa todas as possíveis combinações de pontos, sendo aumentado os valores da coordenada y em 0.0001. Para a coordenada x não se estabeleceu nenhuma condição, pois foram utilizados os pontos de entrada, sendo assim usados apenas as coordenadas x destes pontos. Para a criação das equações utilizou-se a equação (II), onde y_0 e x_0 são as coordenadas do primeiro ponto escolhido e y_1 e x_1 são as coordenadas do segundo ponto escolhido.

$$y = y_0 + (x - x_0)*(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) \qquad \text{(II)}$$

Ao final, obteve-se dados para serem comparados, e por fim, comprovar a eficiência do Método de Mínimos Quadrados.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O código de mínimos quadrados retornou como melhor equação y = 1.65594154 + 0.26982511x e com qualidade e ajuste: 0.92887578.

Testado o segundo programa, por análise de força bruta em retas de regressão simples, obteve-se como melhor equação y = 1.65593120 + (0.26982933)x e com qualidade e ajuste: 0.92887578. Neste último programa, percebeu-se que o tempo de execução é proporcional ao número de pontos da entrada, ou seja, quanto maior a quantidade de pontos mais tempo o código demora para fornecer uma resposta.

Ao finalizar os testes nos programas, inferiu-se que o Método de Mínimos Quadrados é um método otimizado e confiável para ser utilizado em problemas matemáticos, computacionais ou até mesmo extrapolações, pelo fato de ter dado a mesma qualidade de ajuste nos dois programas com as 8 casas decimais.

4. CONCLUSÕES

Após o término do teste, verificou-se a eficiência do Método de Mínimos Quadrados, pois o mesmo apresentou resultados bem aproximados dos cálculos realizados por análise de força bruta em retas de regressão simples, conforme código apresentado no link presente na sessão de Materiais e Métodos. Por mais que as respostas não foram idênticas, as mesmas tinham a diferença depois da 8ª casa decimal. Lembrando que os dados são trabalhados com aproximações, buscando encontrar uma melhor equação linear, por isso, essa pequena diferença nas casas decimais não é um fator para impor dúvida no quesito da utilização do Método de Mínimos Quadrados.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Renato Neves De. **O Método dos Mínimos Quadrados: Estudo e aplicações para o ensino médio**. UENF, Rio de Janeiro, 2015. Disponivel em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/28052015Renato-Neves-de-Almeida.pdf> Acessado em: 01 ago. 2019.

BARROSO, L. et. al. **Cálculo Numérico**. 2ª Edição. São Paulo: Editora Harbra, 1987.

FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Editora Pearson Education do Brasil Ltda., 2007.

FILHO, Frederico Ferreira Campos. **Algoritmos Numéricos, 2a edição**. LTC, Rio de Janeiro, 2013.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais, 2a edição**. Makron Books, São Paulo, 2010.

GILAT, Amos; SUBRAMANIAN, Vish. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**. Bookman, São Paulo, 2008.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. **Cálculo Numérico**. Porto Alegre: Editora Prentice-Hall, 2003.

PUGA, L. Z.; TÁRCIA, J. H. M.; PAZ, A. P. **Cálculo Numérico**. São Paulo: LCTE, 2009.