

**11ª Jornada Científica e
Tecnológica do IFSULDEMINAS**

**& 8º Simpósio de
Pós-Graduação**

INVESTIGAÇÃO DE ESCALA PARA O MAPA LOGISTIC-LIKE

Luam S. PAIVA¹; Joelson D. V. HERMES²; Anderson A. A. da SILVA³

RESUMO

O estudo aqui realizado discute o decaimento para o estado estacionário de uma família de mapeamentos logIstic-like. No qual os resultados numéricos encontrados foram confirmados a partir de hipóteses de escala, as quais foram calculadas analiticamente. Tal análise é feita na bifurcação com $\mu = 0$.

Palavras-chave: Caos; Sistemas Dinâmicos, Dinâmica Não-linear

1. INTRODUÇÃO

O mapa logístico é um modelo matemático que foi descrito por Robert May em 1976, com uma aplicação direta em Biologia (MAY, 1976). Tal mapa é descrito pela equação:

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n). \quad (1)$$

Esta equação possui muitas virtudes, como o fato de ser acessível e mesmo assim ilustrar muitas noções de dinâmica não linear (FEIGENBAUM, 1979), apresentando uma matemática cheia de vida e riqueza onde muito aspectos ainda não são rigorosamente entendidos, e são estudados por alguns dos melhores matemáticos da atualidade.

Neste trabalho estudaremos a dinâmica do mapa logIstic-like, que é descrito pela equação:

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \text{ com } \gamma > 0 \quad (2)$$

em que R é um parâmetro de controle. Tal mapa representa uma generalização do mapa logístico, é possível perceber que para $\gamma = 1$ recuperamos o mapa logístico convencional.

2. MATERIAL E MÉTODOS

No decorrer do trabalho fizemos o uso de computadores para auxiliar nas simulações numéricas, através das quais foi observado a evolução do sistema. Além disso, fizemos o tratamento analítico do problema.

¹ Bolsista PIVIC, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: paivaluan41@gmail.com

² Orientador, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br

³ Colaborador, UNESP – Campus Rio Claro. E-mail: andersonantsilva1@gmail.com

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Vamos considerar a convergência para o ponto de equilíbrio em duas situações distintas, em que a primeira será no ponto de bifurcação e a segunda será imediatamente antes do ponto de bifurcação.

A variável importante para a descrição é a distância do ponto de equilíbrio, que é escrita como uma função de n, x_0 e $\mu = R_c - R$, o qual R_c identifica o ponto de bifurcação e $R < R_c$. Se $\mu = 0$ logo $R = R_c$, onde estamos exatamente na bifurcação. Neste fato a evolução dinâmica para o ponto fixo deve ser obtida por uma função homogênea generalizada em função das variáveis n, x_0 . Tal função pode ser descrita como:

$$x(x_0, n) = lx(l^a x_0, l^b n) \quad (3)$$

no qual l é um fator de escala, a e b são expoentes característicos (HERMES, 2015).

Fazendo uma análise onde $\mu = 0$. Consideremos três hipóteses.

- 1- $x(n) \sim x_0^\alpha$, para $n \ll n_x$
- 2- $x(n) \sim n^\beta$, para $n \gg n_x$
- 3- $n_x \sim x_0^z$

no qual n_x define o número de iterações do crossover que marca a mudança do platô constante para o decaimento em lei de potência n^β . A partir das três hipóteses e da função homogênea generalizada, conseguimos relacionar os expoentes críticos com os expoentes característicos.

Tomando $l^a x_0 = 1$, temos que $l = x_0^{-\frac{1}{a}}$, portanto $x(x_0, n) = x_0^{-\frac{1}{a}} x(1, x_0^{\frac{-b}{a}} n)$. Considerando que $x(1, x_0^{\frac{-b}{a}} n)$ seja uma constante para $n \ll n_x$, relacionando com a hipótese 1, temos que $x_0^{-\frac{1}{a}} = x_0^\alpha$, portanto

$$\alpha = \frac{-1}{a}$$

Considerando agora $l^b n = 1$, temos que $l = n^{-\frac{1}{b}}$, logo $x(x_0, n) = n^{-\frac{1}{b}} x(n^{\frac{-a}{b}} x_0, 1)$. Considerando que $x(n^{\frac{-a}{b}} x_0, 1)$ seja uma constante para $n \gg n_x$, e relacionando com a segunda hipótese temos que $n^{-\frac{1}{b}} = n^\beta$, então:

$$\beta = \frac{-1}{b}$$

Comparando as duas expressões de l obtemos que $n^\beta = x_0^\alpha$, portanto $n_x = x_0^{\frac{\alpha}{\beta}}$. E temos da hipótese 3 que $n_x = x_0^z$, portanto $x_0^{\frac{\alpha}{\beta}} = x_0^z$, assim:

$$z = \frac{\alpha}{\beta}$$

Tem-se portanto que a relação acima define uma lei de escala, em que se tivermos dois expoentes conhecidos encontramos o terceiro.

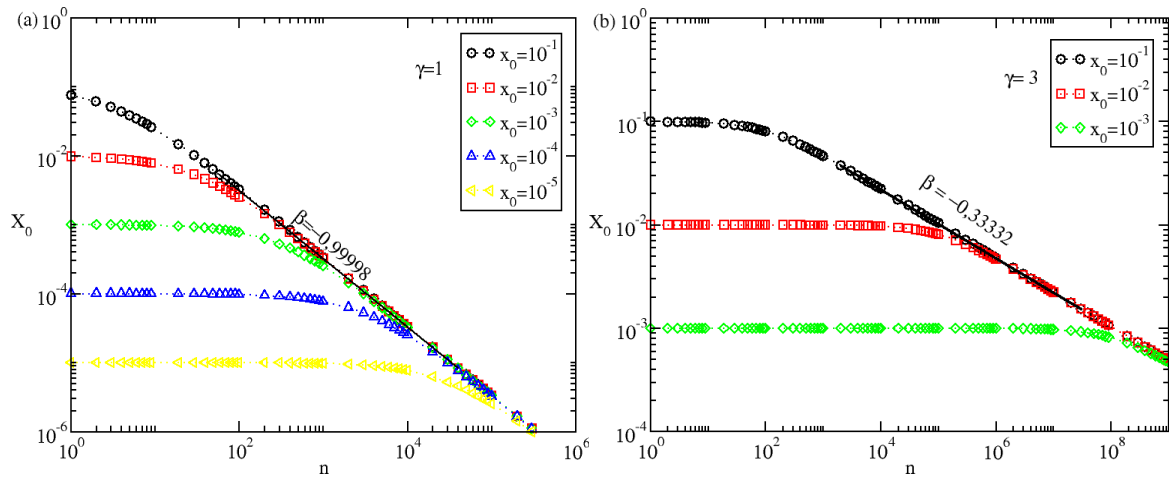


Figura 1: Diagrama de decaimento para (a) $\gamma=1$ e para (b) $\gamma=3$.

Ainda para o caso $R = R_c = 1$ iremos mostrar uma abordagem analítica para o equilíbrio, onde iremos analisar a equação do mapeamento escrito como $x_{n+1} = x_n - x_n^{\gamma+1}$, desse modo essa equação pode ser reescrita (HERNES, 2015):

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^{\gamma+1}, \text{ disso temos } \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} = -x_n^{\gamma+1} \quad (4)$$

Podemos assim fazer a seguinte aproximação:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \cong \frac{dx}{dn} = -x_n^{\gamma+1} \quad (5)$$

Muito próximo do ponto fixo, consideramos que a dinâmica da variável x é praticamente contínua, com isso chegamos em uma EDO de primeira ordem. Fazendo a separação de variáveis temos:

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{1}{x^{\gamma+1}} dx = \int_0^n dn. \quad (6)$$

Realizando os cálculos, e organizando de modo conveniente, chegamos em:

$$x(n) = \frac{x_0}{[x_0^\gamma \gamma n + 1]^{\frac{1}{\gamma}}}. \quad (7)$$

Analisando a equação (7) temos que $(x_0^\gamma \gamma n) \ll 1$ e para $(n \ll n_x)$, então $x(n) \sim x_0^1$. Verificando com a primeira hipótese de escala que fizemos anteriormente, temos que $\alpha = 1$. Para o caso em que $(x_0^\gamma \gamma n) \gg 1$ e para $(n \gg n_x)$, então $x(n) \sim n^{\frac{-1}{\gamma}}$. Verificando com a segunda hipótese de escala chegamos que $\beta = \frac{-1}{\gamma}$. Para o último caso em que $(x_0^\gamma \gamma n) = 1$, então $n_x \sim x_0^{-\gamma}$. Comparando com a terceira hipótese de escala, temos que $z = -\gamma$.

Os resultados encontrados confirmam a validade da nossa hipótese de lei de escala, na qual temos que $z = \frac{\alpha}{\beta}$, porém encontramos que $\alpha = 1$, $\beta = \frac{-1}{\gamma}$ e $z = -\gamma$. Substituindo α e β em z , temos que $z = -\gamma$, validando assim o resultado encontrado acima.

4. CONCLUSÕES

As simulações numéricas em $\mu = 0$ confirmam os resultados encontrados analiticamente uma vez que para $\gamma = 1$ chegamos que, $\alpha = 1$, $\beta = -0,99998$ e $z = -1,00002$, e para $\gamma = 3$ chegamos que, $\alpha = 1$, $\beta = -0,33332$ e $z = -3,0002$.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.

NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.

REFERÊNCIAS

FEIGENBAUM, M. J. **The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations.** J. Stat. Phys. 21, 669-706, 1979.

HERMES, J. D. V.; et al. In: Simpósio da Pós-Graduação do IFSULDEMINAS, 4, 2015, Poços de Caldas, **ESTUDO DO MAPA LOGÍSTICO-LIKE: Convergência para o estado estacionário.** Resumos... Poços de Caldas: IFSULDEMINAS, 2015, p.6

MAY, R. M. **Simple mathematical models with very complicate dynamics.** Nature, 261 (5560): 459.