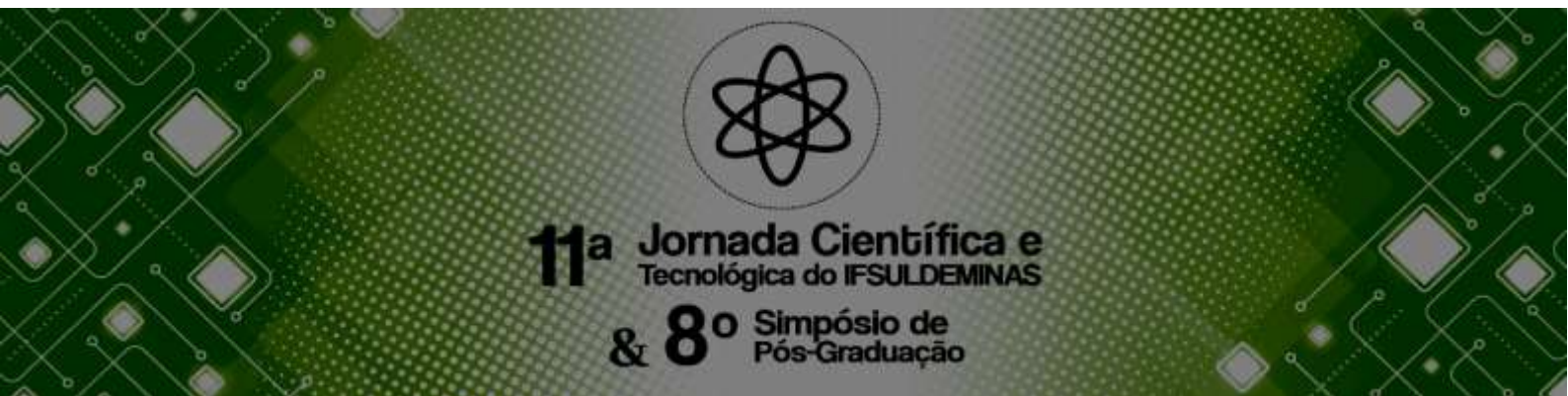




MAPA HASSELL: uma investigação de escala

Beatriz de F. P. SILVA¹; Joelson D. V. HERMES²

RESUMO

Neste trabalho propomos determinar os expoentes de Lyapunov para verificar a ocorrência de caos e de bifurcações para o Mapa Hassell, além disso, discutiremos o conceito de hipóteses de escala a fim de determinarmos os expoentes característicos relacionados à bifurcação transcítica.

Palavras-chave: Caos; Dinâmica não Linear; Mapa Unidimensional.

1. INTRODUÇÃO

A teoria dos Sistemas Dinâmicos investiga fenômenos naturais num determinado instante de tempo, foi estudada inicialmente no século XIX por Henri Poincaré, no entanto a Teoria do Caos só foi reconhecida nas décadas de 1960 e 1970. (FERRARI, 2017)

Para entender melhor o aparecimento de caos e confirmar o comportamento aparentemente caótico no mapa Hassell, serão analisados os expoentes de Lyapunov, os quais são obtidos a partir da distância de duas trajetórias com condições iniciais diferentes, uma vez que tais expoentes são utilizados como indicadores de caos. Através desses números também é possível identificar onde as bifurcações ocorrem (FIEDLER-FERREIRA; PRADO, 2009).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O mapa Hassell é um mapa unidimensional não linear discreto definido pela equação:

$$N_{n+1} = \frac{rN_n}{(1 + aN_n)^\gamma} \quad (1)$$

onde r , a e γ são parâmetros de controle.

A definição dos expoentes de Lyapunov para mapas unidimensionais é dada por:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(x_i)| \quad (2)$$

¹Bolsista PIVIC, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: biahsilva06@gmail.com.

²Orientador, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br.

sendo λ o número de Lyapunov, x_0 a condição inicial dessa trajetória e N um número infinito de iterações ($N \rightarrow \infty$).

Considerando dois pontos iniciais com uma distância infinitesimal entre eles é feita N iterações e a cada iteração uma nova distância é encontrada, se essa distância crescer exponencialmente, o comportamento é dito caótico e o expoente de Lyapunov é positivo. A Figura 1 mostra os valores do expoente de Lyapunov comparado com o seu diagrama de bifurcações. (MENDONÇA, 2018)

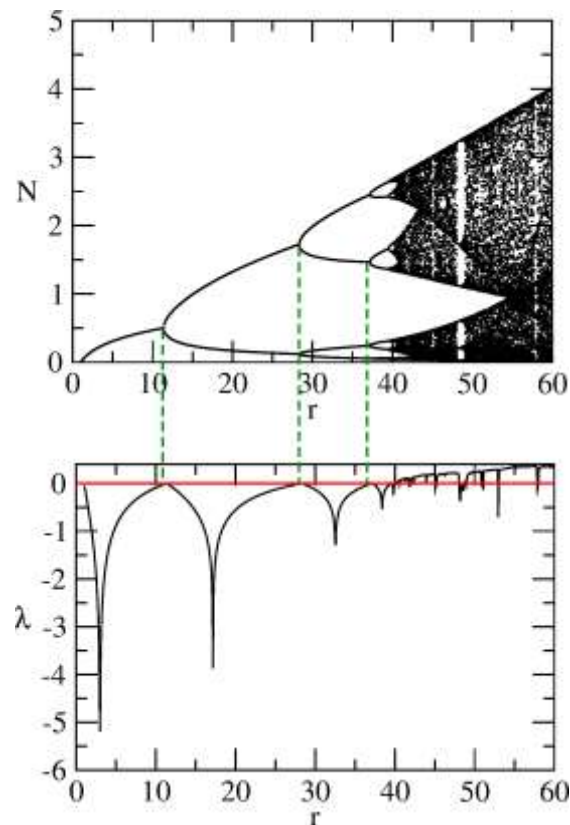


Figura 1: Diagrama de órbitas para o mapa Hassell juntamente com o expoente de Lyapunov.

Dessa forma, pode-se visualizar e confirmar em quais pontos acontecem o caos e as bifurcações para o Mapa Hassell, ou seja é possível notar que na linha vermelha ($\lambda = 0$) no momento em que é tocada pela curva em preto, são marcados no diagrama os pontos de bifurcação. Quando os expoentes são negativos ($\lambda < 0$) verifica-se a estabilidade e para os números positivos ($\lambda > 0$) aparece o caos.

3. MATERIAL E MÉTODOS

No decorrer do trabalho obtivemos os dados através de simulações feitas por um algoritmo escrito em Fortran e com o auxílio do *software* Xmgrace, foi possível analisar e comparar os gráficos para coletar as informações necessárias. Por fim, usamos o formalismo de escala para determinar os expoentes característicos.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Perante os resultados apresentados na Figura 1, pode-se fazer o estudo do decaimento das órbitas para o ponto fixo. Nesse trabalho iremos estudar o ponto fixo $N_1 = 0$, no qual ocorre uma bifurcação transcítica. O comportamento apresentado na Figura 2 nos permite confirmar que a convergência para o ponto fixo depende do número de iterações n , da condição inicial N_0 e da distância que a órbita se encontra do ponto de bifurcação.

Ainda analisando a Figura 2 percebemos que, dependendo das condições iniciais N_0 , as órbitas ficam delimitadas a um platô constante e depois de um certo número de iterações n_x elas decaem em lei de potência, descrita por um expoente β . Tal comportamento nos permite supor as seguintes hipóteses de escala:

1) Para $n \ll n_x$, o comportamento de N versus N_0 é dado por:

$$N(n) \propto N_0^\alpha \quad (3)$$

como $N(n) \propto N_0$, temos que $\alpha = 1$.

2) No caso em que $n \gg n_x$, o decaimento já ocorreu e N versus n é dado por:

$$N(n) \propto n^\beta \quad (4)$$

onde β é um expoente crítico, ou de decaimento.

3) Finalmente, o número de iterações n_x é dado por:

$$n_x \propto N_0^z \quad (5)$$

onde z é um expoente de transição.

Dessa forma, o expoente β é obtido por meio de um ajuste em lei de potência no gráfico da Figura 2, no qual obtivemos $\beta = -0,999999960(1)$.

Já o expoente z é obtido através da Figura 3, que traz o comportamento de n_x versus N_0 , em que o ajuste também é feito em lei de potência e nos dá z aproximadamente igual a -1 .

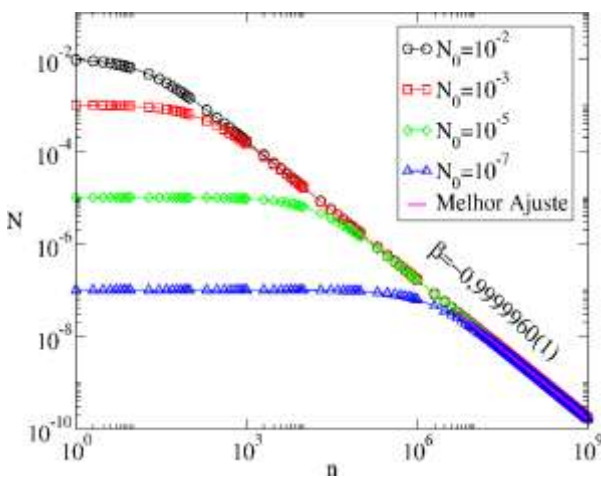


Figura 2: Decaimento para o ponto fixo N_1 .

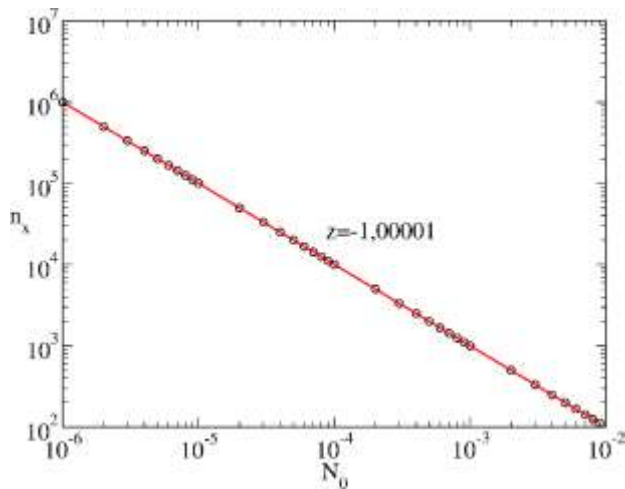


Figura 3: Comportamento de n_x versus N_0 .

Os expoentes encontrados nesse trabalho podem ser usados para reescalar as variáveis dos eixos N e n de modo conveniente, tal que:

$$N \rightarrow \frac{N}{N_0^\alpha} \quad \text{e} \quad n \rightarrow \frac{n}{N_0^z} \quad (6)$$

com isso ocorre o colapso de todas as curvas de N versus n , em uma única curva.

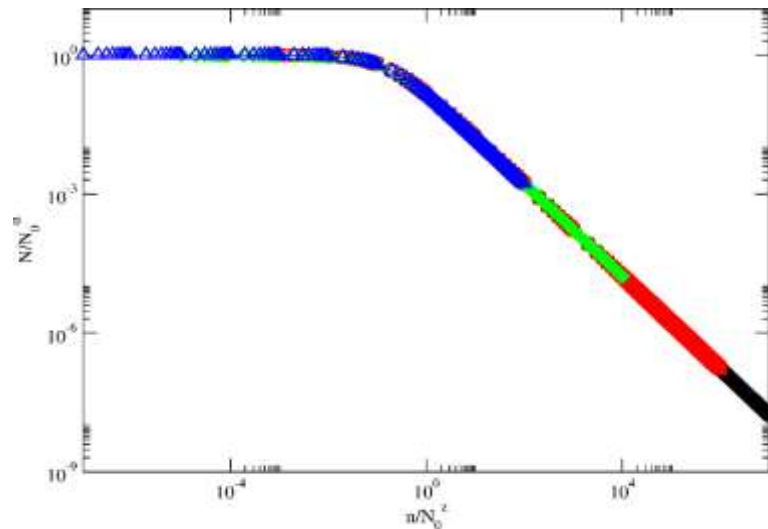


Figura 4: Colapso de todas as curvas em uma única.

Como pode ser observado na Figura 4, este resultado confirma as hipóteses propostas anteriormente, assim como os resultados encontrados.

5. CONCLUSÕES

Através do estudo do expoente de Lyapunov confirmamos os pontos nos quais acontecem as bifurcações e o caos, e a partir da análise da bifurcação transcítica no ponto fixo $N_1 = 0$ estudamos o decaimento das órbitas, propondo as hipóteses de escala através das quais foi possível determinar os expoentes críticos, tais hipóteses foram confirmadas com a reescala das variáveis do sistema e a sobreposição de todas as curvas.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.

NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.

REFERÊNCIAS

FERRARI, Paulo Celso; ANGOTTI, José André P.; TRAGTENBERG, Marcelo H. R.. A Formação de Professores e a História da Teoria do Caos. Instituto de Física -Ufg, Goiás. 2017.

FIEDLER-FERREIRA, N.; PRADO., C. P. C. do. Caos - Uma introdução. Edgard Blucher, 2009.

MENDONÇA, Hans Muller Junho de. Propriedades de escala e cascatas de bifurcações em mapas unidimensionais discretos. 2018.