

11ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS

& 8º Simpósio de Pós-Graduação

ESTRUTURAS *SHRIMP* NO MAPA QUADRÁTICO

Joelson D. V. HERMES¹; Carlos E. de P. ABREU²; Valdir B. da S. JÚNIOR³

RESUMO

No presente estudo discutiremos algumas propriedades do mapa quadrático. O objetivo principal do trabalho é através da introdução de uma perturbação na equação do mapa, caracterizar a distribuição de estruturas periódicas conhecidas como *shrims*, as quais aparecem imersas em uma região caótica do espaço de parâmetros. Os resultados encontrados evidenciam a organização esperada para tais estruturas.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos; Caos; Espaço de Parâmetros.

1. INTRODUÇÃO

No estudo sistemas dinâmicos, muitas vezes fazemos uso de mapeamentos discretos para caracterizar a evolução do sistema, em que o tempo é uma variável discreta, ou seja, só assume valores inteiros. Um bom exemplo de mapeamento unidimensional é o mapa quadrático, tal mapeamento apresenta uma série de comportamentos dinâmicos relevantes, dentre os quais incluem-se regularidades, rotas para o caos, assim como diversos tipos de bifurcações, certamente um dos conceitos centrais no estudo de sistemas dinâmicos.

Para analisar o comportamento de um sistema dinâmico existem diversas ferramentas, tais como, espaço de fases, diagrama de órbitas, espaço de parâmetros, dentre outras. Propomos nesse trabalho inserir uma perturbação no mapa quadrático e em seguida estudar o espaço de parâmetros do mapeamento a fim de verificar o aparecimento e distribuição de estruturas periódicas conhecidas como *shrimp*, as quais aparecem imersas em uma região caótica do espaço de parâmetros (COSTA, 2016).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O mapa quadrático é um mapa unidimensional definido da seguinte forma:

$$x_{n+1} = C - x_n^2, \quad (1)$$

onde C é um parâmetro de controle e x é a variável dinâmica.

1 Professor EBTT, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: joelson.hermes@ifsuldeminas.edu.br.

2 Professor EBTT, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: carlos.abreu@ifsuldeminas.edu.br.

3 Professor EBTT, IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes. E-mail: valdir.junior@ifsuldeminas.edu.br.

Para medir a taxa de divergência das trajetórias e, portanto, quantificar a dependência sensível às condições iniciais, utilizam-se os expoentes de Lyapunov. Esses números são utilizados como indicadores de caos e são obtidos a partir da distância das trajetórias de duas condições iniciais distintas. Segundo Ferrara (1994), os expoentes de Lyapunov são definidos da seguinte forma:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln|F'(x_i)|, \quad (2)$$

onde N é o número de iterações e $F'(x_i)$ é a primeira derivada da equação do mapa. Para λ positivo temos órbitas caóticas, enquanto que para λ negativo as órbitas são periódicas. Tal ferramenta é de fundamental importância para nosso estudo.

De acordo com Gallas (1993), *shrimps* são formados por um conjunto regular de janelas adjacentes, centrado em torno do par principal de interseção superestável de arcos parabólicos. Um *shrimp* é um mosaico duplamente infinito de domínios de estabilidade composto por um domínio principal, acrescido de todos os domínios de estabilidade decorrentes de dois períodos adjacentes de duplicação de cascata, juntamente com os seus correspondentes domínios de caos.

A fim de conseguirmos reproduzir tais estruturas apresentamos o método que usamos ao longo do trabalho.

3. MATERIAL E MÉTODOS

O método de estudo consiste em introduzir uma perturbação paramétrica no mapa quadrático forçando o aparecimento de um segundo parâmetro de controle, em seguida calculamos o expoente de Lyapunov para o mapeamento para diferentes valores dos parâmetros de controle, com isso espera-se que ocorra o aparecimento de estruturas periódicas.

Ao longo do trabalho todas as simulações numéricas foram feitas usando um algoritmo escrito em Fortran e os dados obtidos foram usados para gerar os gráficos usando o software Gnuplot.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o intuito de analisar o aparecimento das estruturas periódicas *shrimp*, adicionamos ao mapa uma perturbação paramétrica do tipo $C_n = C(1 + \varepsilon \cdot \cos(n\pi))$, com $\varepsilon \in [0,1]$. Assim, a nova equação do mapa fica escrita como:

$$x_{n+1} = C_n - x_n^2. \quad (2)$$

Ao introduzirmos a perturbação ao mapa foi possível adicionarmos um novo parâmetro no sistema e tornar a dinâmica ainda mais rica, uma vez que ε controla a perturbação em C . Como o

mapeamento agora possui dois parâmetros de controle, podemos construir o que é conhecido na literatura como espaço de parâmetros.

A Figura 1 mostra C em função de ε para uma grade de 4000 por 4000, com condição inicial $x_0 = 0,1$ e descartando um transiente de 10^4 iterações. A paleta de cores mostra os expoentes de Lyapunov, a cor azul corresponde ao caos.

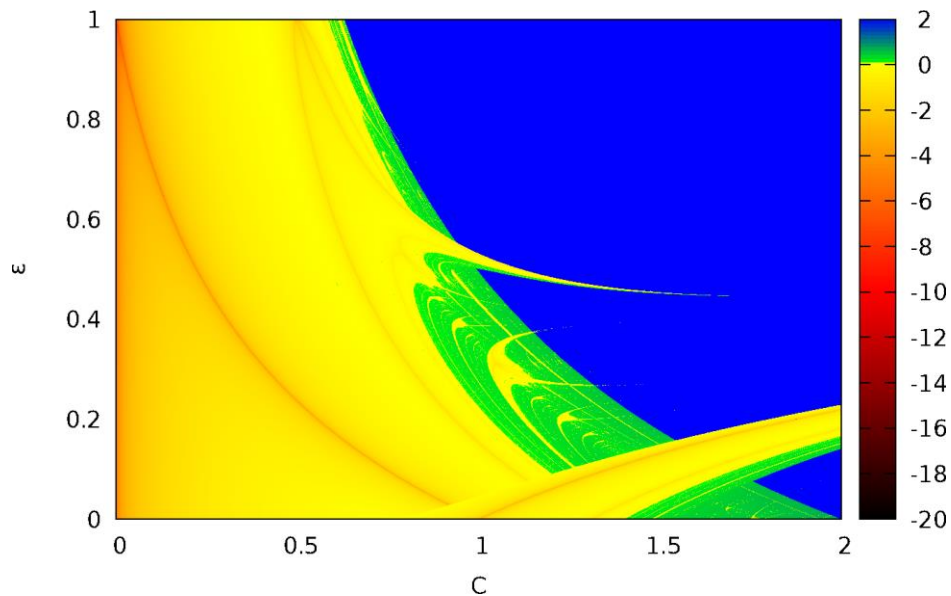


Figura 1: Espaço de parâmetros ε versus c no qual a escala de cores representa o expoente de Lyapunov.

A Figura 2 mostra uma ampliação da região onde os *shrimps* aparecem (estruturas em amarelo), é possível notar que existe um domínio principal definido pelo *shrimp* maior, a partir do qual uma família de *shrimps* segue um dos arcos parabólicos e outra família segue outro arco.

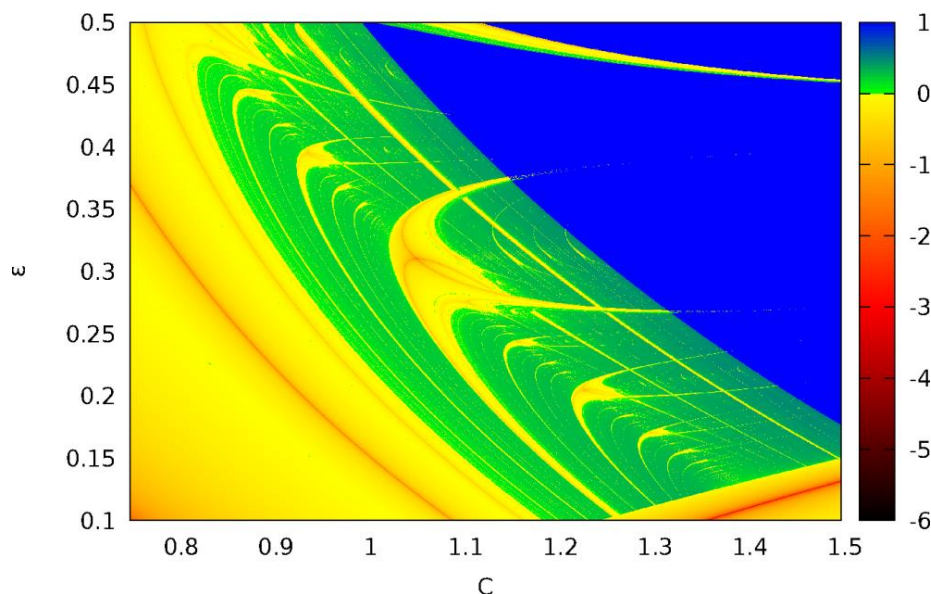


Figura 2: Região do espaço de parâmetros do mapa destacando as estruturas periódicas *shrimps*.

Além dos *shrimps* é possível notar o aparecimento de órbitas superestáveis, regiões em vermelho no gráfico.

5. CONCLUSÕES

Percebemos que no mapa quadrático com perturbação paramétrica existem estruturas periódicas chamadas *shrimps*, tais estruturas formam uma sequência que se organizam de forma bem evidente. A introdução da perturbação no mapa deixou a dinâmica ainda mais rica, sendo possível verificar além do aparecimento dos *shrimps* o surgimento de curvas superestáveis. Pretendemos em trabalhos futuros estudar a regra matemática que determina como ocorre a organização dos *shrimps* imersos nas regiões caóticas por meio das chamadas curvas extremas.

AGRADECIMENTOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes.
NIPE – Núcleo Institucional de Pesquisa e Extensão IFSULDEMINAS – Campus Inconfidentes.

REFERÊNCIAS

FERRARA, N. F.; PRADO, C. P. C.: Caos – Uma Introdução. Editora Blucher, 1994.

GALLAS, J. A. C. Structure of the parameter space of the hénon map. Physical Review Letters, v. 70, p. 2714–2717, 1993.

COSTA, D. R. da; et.al. The role of extreme orbits in the global organization of periodic regions in parameter space for one dimension maps. Physical Review Letters A, v. 380, p. 1610-1614, 2016.