11ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS & 8º Simpósio de Pós-Graduação

INTEGRAL DE RIEMANN: a área entre o gráfico de uma função e uma reta afim

RESUMO

Neste relato de experiência, objetivou-se difundir o estudo no campo da Matemática, descrevendo uma curiosidade, a qual surgiu durante as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Tal questionamento está relacionado a calcular a área entre o gráfico de uma função e uma reta afim. Após realizar pesquisas na literatura, encontrou-se um assunto a respeito, no livro de Stewart (2014), mas o qual não demonstrava o passo-à-passo para chegar no projeto de descoberta que o livro abordava. Nesse sentido, por meio da Geometria, este trabalho demonstrou o procedimento para calcular a área mencionada anteriormente. Ao final, conseguiu-se solucionar o problema, realizando a demonstração não abordada no livro. Com este estudo, muitos poderão aprimorar seu conhecimento na área de Matemática e, além disso, foi possível observar que a busca do conhecimento é sempre bem-vinda e compensadora.

Palavras-chave: Integral de Riemann; reta afim; demonstração; projeto de descoberta.

1. INTRODUÇÃO

Comumente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, é ensinado os procedimentos denominados *Integrações*, os quais possuem, entre outras, a finalidade de obter-se áreas entre o gráfico de uma função e o eixo x. Tal fato, ocasionou em mim uma curiosidade, e se eu quisesse mudar a hipótese do meu problema? Isto é, calcular a área entre o gráfico de uma função e uma reta afim.

Após realizar estudos na literatura, encontrou-se, no livro do Stewart (2014), um projeto de descoberta sobre rotação em torno de uma reta inclinada. Esse projeto de descoberta tem justamente o intuito de descrever um método para calcular o volume do sólido de revolução, quando o eixo de rotação é uma função afim. Entretanto, o livro não demonstra o caminho para realizar tal cálculo. Logo, para poder aplicá-la é necessário validar, então objetivou-se neste trabalho demonstrar o passo a passo geral para encontrar a área da região acima de uma reta afim. Pretende-se, por meio deste trabalho, popularizar e difundir o estudo deste assunto no campo da Matemática.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na educação básica aprende-se a calcular a área de alguns polígonos, como de um quadrado, de um triângulo e até mesmo de um hexágono por meio da decomposição de polígonos previamente conhecidos. É assim, com o amadurecimento matemático, nós, matemáticos, nos deparamos em quererem calcular a área sob o gráfico de uma função, como por exemplo, suponha-se que se quer calcular a área acima do eixo x sob o gráfico de $y = f(x)$ (uma função contínua e não-negativa definida no intervalo $[a, b]$), surgindo, assim, um impasse a ser investigado.

Nesse contexto, uma boa ideia para resolver o problema seria decompor a área desejada em um determinado número infinito de triângulos e quadrados, conhecido como o método da *Exaustão de Eudoxo*, o qual consiste em inscrever dentro de uma figura plana uma sequência de polígonos em que a soma de suas áreas converge para a área da figura desejada (BONGIOVANNI, 2005). Entretanto, existe um método mais sistemático da *Integral de Riemann.* De modo intuitivo, esse método consiste em aproximar a figura curvilínea por meio de retângulos cada vez menores e depois somar a área de todos eles.

Seja $I = [a, b]$, então uma partição de I é $a = t_0 < t_i < t_2 < ... < t_n = b$, que é um subconjunto finito de pontos, assim $P = \{t_1\}_{i=0}^{n}$ e sua norma é o tamanho do maior subintervalo formado, isto é, $|P| = máx\ \{t_i - t_{i-1}\}$ (LIMA, 2002).

Seja $f : [a, b] \rightarrow \Re$ uma função limitada, P uma partição de $[a, b]$ e $c_i \in [a, b]$ com $t_{i-1} < c_i < t_i$. A soma de Riemann de f, relativa a partição P e a escolha dos c_i, é $S(f, P, \{c_i\}_{i=1}^{n})$ $= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ \Delta t_i$, na qual $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ é o comprimento de cada subintervalo.

Dizemos que $f : [a, b] \rightarrow \Re$ é integrável se existe $L \in \Re$ tal que $L = \lim_{|P| \to 0} S(f, P, \{c_i\})$ para toda escolha de $\{c_i\}$ relativa a P, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|P| < \delta$ temos $|S(f, P, \{c_i\}) - L| < \varepsilon$. Nesse caso escrevemos, $L = \int_a^b f(x)\ dx$ que é o que chamamos de área abaixo da função.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Nosso objetivo é fazer uma mudança de variáveis, a "grosso modo" precisamos escrever Δu em função de Δx que será a base de cada retângulo e depois disso encontrar a função altura. Deste modo, primeiramente, na Figura 1(a), veja como a largura de cada retângulo na reta é expressa em termos da largura dos retângulos do eixo x, então $tan(\alpha) = f'(x)$ e $tan(\beta) = m$. Se β é o ângulo externo, então $\beta = \alpha + \gamma$, logo $\gamma = \beta - \alpha$.

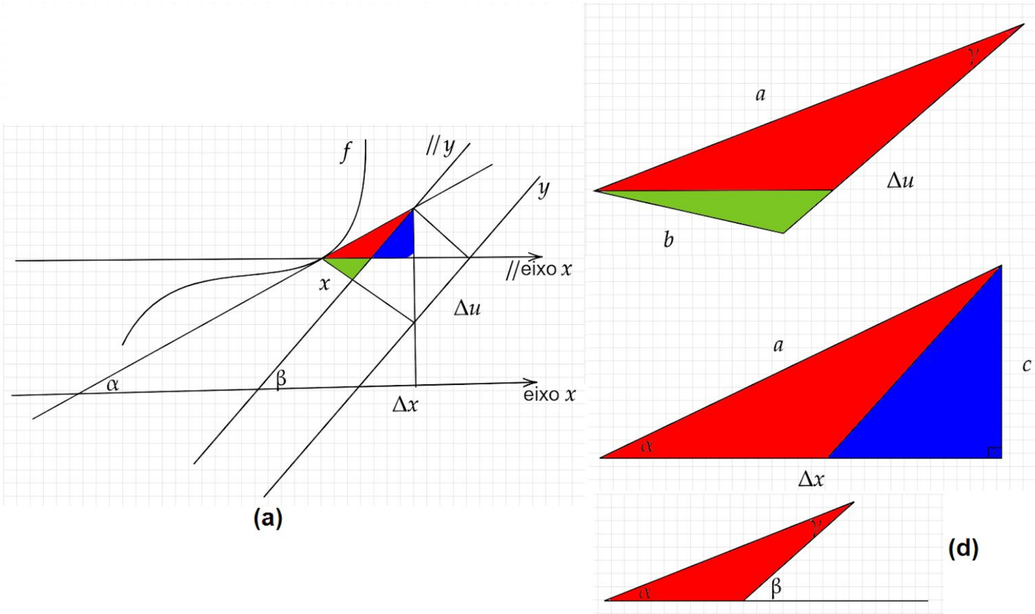

Figura 1: Triângulos formados. **Fonte:** Autores.

Observe, nas Figura 1(b) e (c), os triângulos retângulos que são formados. Temos as relações $tan(\gamma) = \frac{b}{\Delta u}$ e $tan(\alpha) = \frac{c}{\Delta x}$. Assim $b = tan(\beta - \alpha) = \frac{tan(\beta) - tan(\alpha)}{1 + tan(\alpha)tan(\beta)}$ e $c = tan(\alpha)\Delta x = f'(x)\Delta x$. Pelo *Teorema de Pitágoras*, $a^2 = b^2 + \Delta u^2$ e $a^2 = c^2 + \Delta x^2$, assim igualando as igualdades temos que $b^2 + \Delta u^2 = c^2 + \Delta x^2$, então $\Delta u^2 = c^2 + \Delta x^2 - b^2 = f'(x)^2\Delta x^2 + \Delta x^2 - tan^2(\gamma)\Delta u^2$.

Desse modo, escrevendo Δu em função de Δx temos:

$$\Delta u = \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}\Delta x}{\sqrt{1+tan^2(\gamma)}} = \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}\Delta x}{\sqrt{\frac{1+m^2f'(x)^2+m^2+f'(x)^2}{(1+mf'(x))^2}}} = \frac{\sqrt{(1+mf'(x))^2}}{\sqrt{1+m^2}}\Delta x = \frac{|1+mf'(x)|}{\sqrt{1+m^2}}\Delta x$$

Veja, na Figura 2, os triângulos retângulos de lados d, e, g. A altura de cada triângulo na reta é dado por g, onde $d = f(x) - (mx + b)$, bem como $tan(\beta) = m = \frac{e}{g}$, logo $e = mg$. Assim:

$$g = \frac{d}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{f(x) - mx - b}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Tome uma partição de $[p, q]$ de tamanho Δx_i e escolha x_i em cada subintervalo. A área da região será o limite da soma de Riemann:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(u(x_i)) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)-mx_i-b}{\sqrt{1+m^2}}\frac{|1+mf'(x_i)|}{\sqrt{1+m^2}}\Delta x_i = \frac{1}{1+m^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - mx_i$$

$$= \frac{1}{1+m^2}\int_p^q (f(x) - mx - b)\,|1 + mf'(x)|\,dx$$

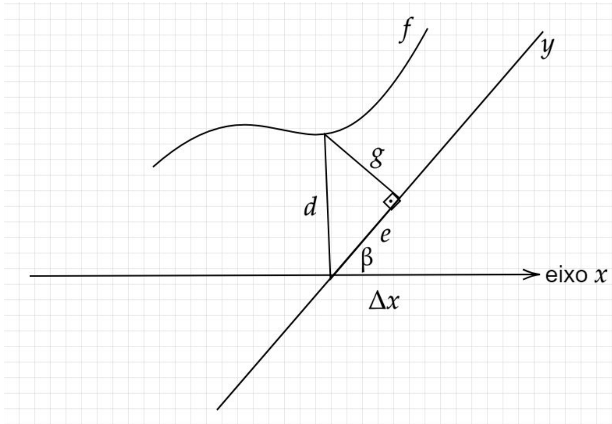

Figura 2: Função altura. **Fonte:** Autores.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da fórmula obtida para a área entre o gráfico de uma função e uma reta afim, agora somos capazes de calcular o volume do sólido de revolução quando o eixo de rotação é uma função afim. A ideia é colocar vários cilindros dentro do sólido de revolução e como sabemos calcular o volume de um cilindro, que é dado por $V = \pi r^2 h$, em que r é o raio do cilindro e h a sua altura. Assim, basta calcularmos o volume de um cilindro infinitesimal, fazendo $dV = \pi[g(u(x_i))]^2 dx$ e assim por meio da *Integral de Riemann* somaremos o volume de todos os cilindros contido no sólido. Teremos então que o volume será expresso pela seguinte fórmula $V = \int_p^q \pi[g(u(x_i)]^2 dx$.

5. CONCLUSÕES

Neste relato de experiência, objetivou-se difundir o estudo na área do Cálculo Diferencial e Integral, demonstrando as fórmulas de área entre o gráfico de uma função e uma reta afim e o volume do sólido de revolução quando o eixo de rotação é uma função afim. Com este trabalho, muitos poderão aprimorar seu conhecimento na área de Matemática, como também despertar o espírito de investigação.

REFERÊNCIAS

STEWART, James. Cálculo. 7ª edição. Cengage Learning, vol. 1, 2014.
LIMA, Elon.Lages. Curso de Análise , Vol. I, Projeto Euclides, IMPA, RJ, 2002.
BONGIOVANNI, Vincenzo. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. 91-110. 2005.