

11ª Jornada Científica e Tecnológica do IFSULDEMINAS

& 8º Simpósio de Pós-Graduação

A SUPERFÍCIE DE ENNEPER, O CATENÓIDE E O HELICÓIDE:

superfícies mínimas mergulhadas no $\mathbb{R}^3$

Gabriela C. da SILVA¹; Sidnei F. de SOUSA²; Vinícius de S. GONÇALVES³; Rafael L. BASTOS⁴;

RESUMO

Um dos objetos de estudo mais importantes em Geometria Diferencial são as superfícies mínimas. Elas, desde o problema inicial proposto por Plateau, que consiste em minimizar a área dentre todas as superfícies S do $\mathbb{R}^3$ com $\partial S = C$ (em que C é uma curva fechada e sem auto-interseções), ainda têm despertado nos dias atuais a instigação do tema por vários geometras. Esse problema também tem um significado físico, de tal forma que se podem tratar essas superfícies como películas de sabão, contornada por uma dada curva C , que se encontram em configuração de equilíbrio, tendo o mesmo ambiente e pressão atmosférica. Este artigo tem por objetivo mostrar o que são superfícies mínimas, como também apresentar uma demonstração das primeiras superfícies mínimas descobertas: a superfície de Enneper, o catenóide e o helicóide, a fim de difundir o estudo no âmbito acadêmico do IFSULDEMINAS para pesquisas em Matemática.

Palavras-chave: superfície; Enneper; catenóide; helicóide; plano; minimizar; área.

1. INTRODUÇÃO

Em Geometria Diferencial uma das teorias mais importantes são as superfícies mínimas, que ficou conhecida pelo *Problema de Plateau*, podendo ser descrito da seguinte maneira: *provar que para cada curva fechada $C \subset \mathbb{R}^3$ existe uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira.*

Esse problema tem um significado físico, de tal forma que se podem tratar essas superfícies como películas de sabão. Assim, consideremos uma situação hipotética em que construímos com um arame fino uma curva fechada C e o mergulhamos em um recipiente com água e sabão. Ao retirá-lo da água, poderemos observar a formação de uma película fina contornada pela curva C (arame), estando em configuração de equilíbrio, tendo o mesmo ambiente e pressão atmosférica que podem ser mostradas, por considerações físicas, a película assume uma posição onde em seus pontos regulares a curvatura média é nula.

Na figura 1(b) e 1(c), estão representadas, respectivamente, o helicóide e o catenóide que foram descobertas em 1776 por Meusnier, que demonstrou que a definição de Lagrange para

¹ Discente de Matemática, IFSULDEMINAS – Campus Passos. E-mail: gabriela.silva@alunos.ifsuldeminas.edu.br.

² Colaborador, Rio de Janeiro. E-mail: sidneifs13@gmail.com.

³ Colaborador, Faculdade de Filosofia Ciência e Letras de Ribeirão Preto - USP. E-mail: vinisouzax@gmail.com.

⁴ Orientador, IFSULDEMINAS – Campus Passos. E-mail: rafael.bastos@ifsuldeminas.edu.br.

superfícies mínimas como pontos críticos de um problema variacional é equivalente ao anulamento total da curvatura média. E em 1864, Enneper descobriu um novo exemplo de superfícies mínimas, conhecida hoje em dia como a superfície de Enneper, representada na figura 1(a).

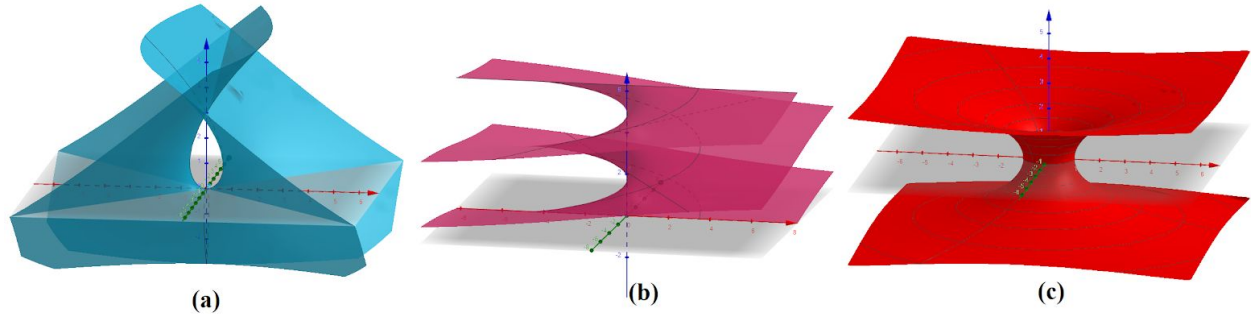


Figura 1: Superfícies Mínimas. **Fonte:** Autores (Geradas pelo software Geogebra).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O produto interno natural do $\mathbb{R}^3 \supset S$, induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno, que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$: Se $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 , como vetores em $\mathbb{R}^3$. A esse produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica (i.e., $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$ e $\langle w_2, w_1 \rangle_p$ é linear em w_1 e w_2), corresponde chamada a *primeira forma fundamental*⁵ da superfície regular dada por:

$$I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0$$

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental associada a uma parametrização $x(u, v)$ em p . Os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{x_u, x_v\}$ de $T_p S$ são dados por: $E(u_0, v_0) = \langle x_u, x_u \rangle_p$; $F(u_0, v_0) = \langle x_u, x_v \rangle_p$; $G(u_0, v_0) = \langle x_v, x_v \rangle_p$.

A forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a *segunda forma fundamental* de S em p , que são expressos na base $\{x_u, x_v\}$ em termos dos coeficientes e, f, g .

$$e = \frac{\det(x_u, x_v, x_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}}; f = \frac{\det(x_u, x_v, x_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}}; g = \frac{\det(x_u, x_v, x_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}} \quad (2.1)$$

Assim, segundo Carmo (1976), podemos expressar a curvatura média de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ em termos dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental como:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{\sqrt{EG-F^2}} \right) \quad (2.2)$$

⁵ A primeira forma fundamental é meramente uma expressão de como a superfície S herda o produto interno natural do $\mathbb{R}^3$. Geometricamente, como veremos em breve, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer medidas sobre a superfície (comprimento de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões), sem fazer menção ao espaço ambiente $\mathbb{R}^3$, onde está a superfície.

E uma superfície regular é chamada mínima se $H \equiv 0$, ou seja, a sua curvatura média é identicamente nula.

3. MATERIAL E MÉTODOS

Tal pesquisa caracteriza-se pela utilização do método científico dedutivo, de forma a obter resultados e conclusões de premissas por meio do raciocínio lógico. Por conseguinte, adotou-se pela pesquisa bibliográfica, utilizando como bibliografia base o livro de *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* de Carmo (1976). Por meio dos processos hipotético-dedutivos, foi possível demonstrar que a superfície de Enneper, o catenóide e o helicóide são superfícies mínimas.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Vamos mostrar que a curvatura média (H) da superfície de Enneper é nula. Tome uma das parametrizações, dada por:

$$x(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right), \text{ com } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Desse modo, calculemos os termos da primeira forma fundamental:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = 1 - 2u^2 + u^4 + 2v^2 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 + 4u^2 = u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2uv - 2uv^3 + 2u^3v - 4uv = 0$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = 4u^2v^2 + 1 - 2v^2 + v^4 + 2u^2 - 2u^2v^2 + u^4 + 4v^2 = u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1$$

E agora calculemos os termos da segunda forma fundamental:

$$e = \frac{\det(x_u, x_v, x_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{2(u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2+1)}{u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2+1} = 2 ;$$

$$f = \frac{\det(x_u, x_v, x_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{0}{u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2+1} = 0 ;$$

$$g = \frac{\det(x_u, x_v, x_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{-2(u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2+1)}{u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2+1} = -2$$

Assim, agora que temos os termos da 1ª e 2ª forma fundamental vamos calcular a curvatura média:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG-2fF+gE}{\sqrt{EG-F^2}} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2+1) - 2 \cdot 0 \cdot 0 + (-2)(u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2+1)}{(u^4+v^4+2u^2+2v^2+2u^2v^2+1)^2} \right\} = 0$$

Ademais, mostraremos agora que H do catenóide é nula. Considere x uma parametrização, dada por:

$$x(u, v) = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), av), \text{ com } 0 < u < 2\pi \text{ e } -\infty < v < \infty.$$

Desse modo, calculemos os termos da 1ª forma fundamental:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = a^2 \cosh^2(v) \sin^2(u) + a^2 \cosh^2(v) \cos^2(u) = a^2 \cosh^2(v) [\sin^2(u) + \cos^2(u)] = a^2 \cosh^2(v)$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = 0$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1$$

E agora calculemos os termos da 2ª forma fundamental:

$$e = \frac{\det(x_u, x_v, x_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{-a^3 \cosh^2(v)}{a^2 \cosh^2(v)} = -a ; f = \frac{\det(x_u, x_v, x_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{0}{a^2 \cosh^2(v)} = 0 ;$$

$$g = \frac{\det(x_u, x_v, x_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{a^3 \cosh^2(v)}{a^2 \cosh^2(v)} = a$$

Agora que temos os termos da 1ª e 2ª forma fundamental vamos calcular a curvatura média:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{\sqrt{EG - F^2}} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-a[a^2 \cosh^2(v)] - 2 \cdot 0 \cdot 0 + a[a^2 \cosh^2(v)]}{[a^2 \cosh^2(v)]^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-a^3 \cosh^2(v) - 0 + a^3 \cosh^2(v)}{[a^2 \cosh^2(v)]^2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{0}{[a^2 \cosh^2(v)]^2} = 0$$

Por último, mostraremos que H da helicóide é nula. Seja x uma das parametrizações, dada por:

$$x(u, v) = (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), au); \text{ com } 0 < u < 2\pi \text{ e } -\infty < v < \infty$$

Desse modo, calculemos os termos da 1ª forma fundamental:

$$E = \langle x_u, x_u \rangle = a^2 \sinh^2(v) \sin^2(u) + a^2 \sinh^2(v) \cos^2(u) + a^2 = a^2 \sinh^2(v) [\sin^2(u) + \cos^2(u)] + a^2 = a^2 \sinh^2(v) + a^2 = a^2 [\sinh^2(v) + 1] = a^2 \cosh^2(v)$$

$$F = \langle x_u, x_v \rangle = -a^2 \sinh(v) \sin(u) \cosh(v) \cos(u) + a^2 \sinh(v) \cos(u) \cosh(v) \sin(u) + a \cdot 0 = 0$$

$$G = \langle x_v, x_v \rangle = a^2 \cosh^2(v) \cos^2(u) + a^2 \cosh^2(v) \sin^2(u) + 0^2 = a^2 \cosh^2(v) [\cos^2(u) + \sin^2(u)] = a^2 \cosh^2(v)$$

Além disso, calculemos os termos da 2ª forma fundamental:

$$e = \frac{\det(x_u, x_v, x_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{0}{a^2 \cosh^2(v)} = 0 ; f = \frac{\det(x_u, x_v, x_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{a^3 \cosh^2(v)}{a^2 \cosh^2(v)} = a ;$$

$$g = \frac{\det(x_u, x_v, x_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{0}{a^2 \cosh^2(v)} = 0$$

Com os termos da 1ª e 2ª forma fundamental vamos calcular a curvatura média:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + gE}{\sqrt{EG - F^2}} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{0 \cdot [a^2 \cosh^2(v)] - 2 \cdot a \cdot 0 + 0 \cdot [a^2 \cosh^2(v)]}{[a^2 \cosh^2(v)]^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{0}{[a^2 \cosh^2(v)]^2} \right\} = 0$$

Portanto, a superfície de Enneper, o helicóide e o catenóide possuem a curvatura média identicamente nula ($H \equiv 0$), visto que o conceito de parametrização é local e como pegamos um ponto arbitrário e uma parametrização em torno desse ponto a propriedade vale para uma vizinhança de qualquer ponto e assim podemos concluir que estas são superfícies mínimas.

4. CONCLUSÕES

Este artigo teve como objetivo mostrar o que são superfícies mínimas, bem como apresentar os três exemplos clássicos delas. A Geometria Diferencial tem profundas interligações com outras áreas da Matemática, tais como Topologia (Teoria de Morse e classes características); Equações Diferenciais Parciais (subvariedades mínimas); Sistemas Dinâmicos (fluxo geodésico); Funções Analíticas Complexas (variedades complexas) e Teoria dos Grupos (variedades homogêneas). Devido ao seu carácter interdisciplinar, a Geometria Diferencial tem mostrado grande ímpeto e vem se expandindo em diversas vertentes, que apresentam um relevante volume de pesquisas nos dias atuais. Assim, faz-se necessário criar grupos de estudos a fim de difundir o estudo da Geometria Diferencial no âmbito acadêmico do IFSULDEMINAS.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Prentice-Hall. 1 ed., 1976.

CARMO, M. P. **Superfícies mínimas**. Publicações Matemáticas. 2 ed., IMPA, 2009.